

ISSN 1609-0586

**BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ**

**ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**NEWS
OF BAKU UNIVERSITY**

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2, 2020

Bakı–2020

Baş redaksiya heyəti:

Babayev E.S. (baş redaktor), **Kazımsadə A.H.** (baş redaktorun müavini),
Əliyeva İ.N., **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Xələfov A.A.**,
Paşayeva N.A., **Rəcəbov M.R.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Paşayev B.G.**
(məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**,
Quluzadə C.M., **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**,
Yaqubov M.H., **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**,
Mirzəyev F.Ə., **Qasıмова R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

RİYAZİYYAT

УДК 519. 633

**РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

З.Ф. ХАНКИШИЕВ

Бакинский Государственный Университет
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе дается применение метода конечных разностей к решению одной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральными граничными условиями. Строится разностная задача, аппроксимирующая исходную задачу со вторым порядком точности. Доказывается сходимость и определяется скорость сходимости.

Ключевые слова: метод конечных разностей, интегральные граничные условия, разностная задача, погрешность аппроксимации, принцип максимума, сходимость.

1. Постановка задачи

В настоящей работе дано применение метода конечных разностей к решению следующей задачи:

найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$\int_0^l (cx + d)u(x, t)dx = \mu_1(t),$$

$$0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$\int_0^l c(x)u(x, t)dx = \mu_2(t),$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь $f(x, t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$ - известные непрерывные функции своих аргументов, a, b, c, d - действительные числа, $c(x)$ - известная функция, удовлетворяющая условию $c''(x) = cx + d$. Очевидно, что функция $c(x)$ определяется равенством

$$c(x) = \frac{c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2 + ex + g,$$

где e, g - произвольные действительные числа.

Отметим, что интегральные граничные условия в (1.2) представляют определенную трудность при численном решении подобных задач. В некоторых работах интегральные граничные условия путем замены искомого решения заменяются локальными граничными условиями (см., например [1],[2],[3]). В настоящей работе эти граничные условия также заменяются локальными граничными условиями, и к решению построенной новой задачи применяется метод конечных разностей. Строится разностная задача, аппроксимирующая эту задачу со вторым порядком точности и исследуется сходимость метода.

Предполагается, что задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения частными производными.

2. Сведение решение задачи (1.1)-(1.3) к решению задачи с локальными граничными условиями

Рассмотрим первое граничное условие в (1.2) и продифференцируем его по переменной t :

$$\int_0^l (cx + d) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \mu_1'(t).$$

Отсюда в силу уравнения (1.1) получим:

$$a^2 \int_0^l (cx + d) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = \mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \int_0^l (cx + d)f(x, t)dx. \quad (2.1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в левой части этого равенства, после элементарных преобразований, получим:

$$\int_0^l (cx + d) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = (cl + d) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - d \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - cu(l, t) + cu(0, t).$$

С учетом этого равенства, из (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} & (cl + d) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - d \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - cu(l, t) + cu(0, t) = \\ & = \frac{1}{a^2} \left[\mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \int_0^l (cx + d)f(x, t)dx \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Теперь рассмотрим второе граничное условие в (1.2) и продифференцируем его, также, по переменной t :

$$\int_0^l c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \mu_2'(t).$$

Отсюда в силу уравнения (1.1) имеем:

$$a^2 \int_0^l c(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x)f(x,t)dx. \quad (2.3)$$

С другой стороны

$$\int_0^l c(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = c(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - c'(l)u(l,t) + c'(0)u(0,t) + \mu_1(t).$$

Отсюда и из равенства (2.3) следует справедливость равенства

$$\begin{aligned} & c(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - c'(l)u(l,t) + c'(0)u(0,t) = \\ & = \frac{1}{a^2} \left[\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x)f(x,t)dx \right] - \mu_1(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, вместо граничных условий (1.2) получили условия (2.2) и (2.4). Исключив из этих граничных условий, сначала $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$, затем

$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ приходим к условиям следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_0 u(0,t) + \alpha_1 u(l,t) &= \tilde{\mu}_1(t), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) &= \tilde{\mu}_2(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{-c \cdot c(l) + (cl + d) \cdot c'(0)}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)}, \quad \alpha_1 = \frac{c \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c'(l)}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)}, \quad (2.6)$$

$$\beta_0 = \frac{-c \cdot c(0) + d \cdot c'(0)}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)}, \quad \beta_1 = \frac{c \cdot c(0) - d \cdot c'(l)}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1(t) &= \frac{1}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)} \left[-\frac{c(l)}{a^2} \left(\mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \int_0^l (cx + d) f(x,t) dx \right) + \right. \\ & \left. + \frac{cl + d}{a^2} \left(\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x) f(x,t) dx \right) \right] - (cl + d)\mu_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2(t) = & \frac{1}{d \cdot c(l) - (cl + d) \cdot c(0)} \left[-\frac{c(0)}{a^2} \left(\mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \int_0^l (cx + d) f(x, t) dx \right) + \right. \\ & \left. + \frac{d}{a^2} \left(\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \int_0^l c(x) f(x, t) dx \right) \right] - d \cdot \mu_1(t). \end{aligned}$$

3. Построение разностной задачи

Для построения разностной задачи, соответствующей задаче (1.1), (2.5), (1.3), сначала в области \bar{D} построим сеточную область. С этой целью разделим отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = l/N$, на N равных частей, а отрезок $[0, T]$ оси Ot точками $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \tau = T/j_0$, на j_0 равных частей. Определим в области \bar{D} сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$. Значение сеточной функции $u(x, t)$ в узле (x_n, t_j) сетки, обозначим через y_n^j .

С целью получения аппроксимации с точностью $O(h^2 + \tau^2)$, предположим, что уравнение (1.1) выполняется и на границах $x = 0$ и $x = l$ области \bar{D} . При выполнении этого условия, используя формулу Тейлора, легко можно получить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{u(h, t) - u(0, t)}{h} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - bu(0, t) - f(0, t) \right) + O(h^2), \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= \frac{u(x_N, t) - u(x_{N-1}, t)}{h} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} - bu(l, t) - f(l, t) \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в граничных условиях (2.5) получим:

$$\begin{aligned} \frac{u(h, t) - u(0, t)}{h} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - bu(0, t) \right) + \alpha_0 u(0, t) + \alpha_1 u(l, t) &= \\ &= \tilde{\mu}_1(t) - \frac{h}{2a^2} f(0, t) + O(h^2), \\ \frac{u(x_N, t) - u(x_{N-1}, t)}{h} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} - bu(l, t) \right) + \beta_0 u(0, t) + \beta_1 u(l, t) &= \\ &= \tilde{\mu}_2(t) + \frac{h}{2a^2} f(l, t) + O(h^2). \end{aligned}$$

С учетом этих равенств, в сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$, задаче (1.1), (2.5), (1.3) можем сопоставить следующую разностную задачу [4]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} + \frac{y_1^j - y_0^j}{h} \right) - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} - b \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} \right) + \alpha_0 \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} + \\
& \qquad \qquad \qquad + \alpha_1 \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} = -f_0^j, \\
& \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) - \frac{b}{2} (y_n^{j+1} + y_n^j) = f_n^j, \\
& \qquad \qquad \qquad n = 1, 2, \dots, N-1, \tag{3.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} - b \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} \right) + \beta_0 \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} + \\
& \qquad \qquad \qquad + \beta_1 \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} = f_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\
& y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Здесь $f_0^j = -\tilde{\mu}_1 \left(t_j + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{h}{2a^2} f \left(0, t_j + \frac{\tau}{2} \right)$, $f_n^j = f \left(x_n, t_j + \frac{\tau}{2} \right)$,

$$n = 1, 2, \dots, N-1, \quad f_N^j = \tilde{\mu}_2 \left(t_j + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{h}{2a^2} f \left(l, t_j + \frac{\tau}{2} \right), \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1.$$

Следует отметить, что эта разностная задача аппроксимирует задачу (1.1), (2.5), (1.3) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$, если уравнение (1.1) выполняется и на участках границы $x=0$ и $x=l$ области \bar{D} и решение $u = u(x, t)$ – достаточно гладкая функция.

Разностную задачу (3.1)-(3.2) можно решить, например, методом прогонки [5].

4. Исследование сходимости разностной задачи (3.1)-(3.2)

Рассмотрим разностную задачу (3.1)-(3.2) и перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2} \right) y_0^{j+1} + \frac{1}{2h} y_1^{j+1} + \frac{\alpha_1}{2} y_N^{j+1} + \left(-\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2} \right) y_0^j + \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2h} y_1^j + \frac{\alpha_1}{2} y_N^j = -f_0^j, \\
& -\frac{a^2}{2h^2} y_{n-1}^{j+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_n^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{n+1}^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{n-1}^j + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_n^j -
\end{aligned}$$

$$-\frac{a^2}{2h^2} y_{n+1}^j = f_n^j, \quad n=1,2,\dots, N-1, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \frac{\beta_1}{2}\right) y_N^{j+1} - \frac{1}{2h} y_{N-1}^{j+1} + \frac{\beta_0}{2} y_0^{j+1} + \left(\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \frac{\beta_1}{2}\right) y_N^j - \frac{1}{2h} y_{N-1}^j + \frac{\beta_0}{2} y_0^j = f_N^j, \quad j=0,1,\dots, j_0-1,$$

$$y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\dots, N. \quad (4.2)$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть сеточная функция y_n^j , $n=0,1,\dots, N$, $j=0,1,2,\dots, j_0$, удовлетворяет задаче (4.1)-(4.2). Пусть выполняются условия $f_n^j \leq 0$ ($f_n^j \geq 0$), $n=0,1,2,\dots, N$, $j=0,1,2,\dots, j_0-1$. Если

$$\alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \leq 0, \quad \beta_0 \leq 0, \quad \beta_0 + \beta_1 \geq 0, \quad b \leq 0, \\ \tau \leq \min\left(\frac{2h^2}{2a^2 - bh^2}, \frac{2h^2}{2a^2(1 - \alpha_0 h) - bh^2}, \frac{2h^2}{2a^2(1 + \beta_1 h) - bh^2}\right), \quad (4.3)$$

то решение y_n^j , $n=0,1,\dots, N$, $j=0,1,\dots, j_0$, задачи (4.1)-(4.2), отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при $n=0,1,\dots, N$, $j=1,2,\dots, j_0$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f_n^j \leq 0$, $n=0,1,\dots, N$, $j=0,1,\dots, j_0-1$, и выполняются условия (4.3), но решение y_n^j задачи (4.1)-(4.2) принимает наибольшее положительное значение при $n=n_0$, $j=i+1$, $0 \leq n_0 \leq N$, $0 \leq i \leq j_0$:

$$y_{n_0}^{i+1} = \max_{0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq j_0} y_n^j = M > 0.$$

Пусть $n_0 = 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_0^{i+1} > y_1^{i+1}$.

Рассмотрим первое уравнение в (4.1) при $j=i$:

$$-f_0^i = \left(-\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2}\right) y_0^{i+1} + \frac{1}{2h} y_1^{i+1} + \frac{\alpha_1}{2} y_N^{i+1} + \left(-\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2}\right) y_0^i + \frac{1}{2h} y_1^i + \frac{\alpha_1}{2} y_N^i < \left(-\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2}\right) M + \\ + \frac{1}{2h} y_1^i + \frac{\alpha_1}{2} y_N^i < \left(-\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2}\right) M + \frac{1}{2h} M + \frac{\alpha_1}{2} M +$$

$$+\left(-\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} + \frac{bh}{4a^2} + \frac{\alpha_0}{2}\right)M + \frac{1}{2h}M + \frac{\alpha_1}{2}M = \left(\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{bh}{2a^2}\right)M \leq 0,$$

так как по условию теоремы $\alpha_0 + \alpha_1 \leq 0$ и $b \leq 0$.

Это противоречит условию $f_0^i \leq 0$.

Пусть $0 < n_0 < N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_{n_0}^{i+1} > y_{n_0-1}^{i+1}$.

Рассмотрим разностное уравнение в (5.1) при $n = n_0$, $j = i$:

$$\begin{aligned} f_{n_0}^i &= -\frac{a^2}{2h^2}y_{n_0-1}^{i+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}\right)y_{n_0}^{i+1} - \frac{a^2}{2h^2}y_{n_0+1}^{i+1} - \frac{a^2}{2h^2}y_{n_0-1}^i + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}\right)y_{n_0}^i - \\ &- \frac{a^2}{2h^2}y_{n_0+1}^i > -\frac{a^2}{2h^2}M + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}\right)M - \frac{a^2}{2h^2}M - \frac{a^2}{2h^2}M + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}\right)M - \\ &- \frac{a^2}{2h^2}M = -bM \geq 0, \end{aligned}$$

т.е. $f_{n_0}^i > 0$, что противоречит условию $f_{n_0}^i \leq 0$.

Пусть $n_0 = N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_N^{i+1} > y_{N-1}^{i+1}$.

Рассмотрим последнее уравнение в (4.1) при $j = i$:

$$\begin{aligned} f_N^i &= \left(\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \frac{\beta_1}{2}\right)y_N^{i+1} - \frac{1}{2h}y_{N-1}^{i+1} + \frac{\beta_0}{2}y_0^{i+1} + \left(\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \right. \\ &+ \left.\frac{\beta_1}{2}\right)y_N^i - \frac{1}{2h}y_{N-1}^i + \frac{\beta_0}{2}y_0^i > \left(\frac{1}{2h} + \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \frac{\beta_1}{2}\right)M - \frac{1}{2h}M + \frac{\beta_0}{2}M + \\ &+ \left(\frac{1}{2h} - \frac{h}{2a^2\tau} - \frac{bh}{4a^2} + \frac{\beta_1}{2}\right)M - \frac{1}{2h}M + \frac{\beta_0}{2}M \geq \left(\beta_0 + \beta_1 - \frac{bh}{2a^2}\right)M \geq 0, \end{aligned}$$

так как по условию теоремы $\beta_0 + \beta_1 \geq 0, b \leq 0$.

Это противоречит условию $f_N^i \leq 0$.

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть сеточная функция $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$, удовлетворяет задаче (4.1)-(4.2). Пусть выполняются условия $f_n^j \leq 0, \varphi(x_n) \leq 0$ ($f_n^j \geq 0, \varphi(x_n) \geq 0$), $n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$. Если выполняются условия (4.3), то $y_n^j \leq 0$ ($y_n^j \geq 0$), $n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

Справедливость утверждения этой теоремы следует из принципа максимума.

Следствие. Пусть выполняются условия (4.3). Тогда однородная задача, соответствующая задаче (4.1)-(4.2), имеет только тривиальное ре-

шение $y_n^j = 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$.

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$ – решение разностной задачи (4.1)-(4.2), а $\tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$ – решение разностной задачи, полученной при замене в (4.1) - (4.2) функций $f_n^j, n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$, и $\varphi(x_n), n = 0, 1, \dots, N$, соответственно, на $\tilde{f}_n^j, n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$, и $\tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N$. Тогда, если выполняются условия $|f_n^j| \leq \tilde{f}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$, и $|\varphi(x_n)| \leq \tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N$, то при выполнении условий (4.3) имеют место неравенства $|y_n^j| \leq \tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

Эту теорему можно доказать аналогичным образом, как доказываются подобные теоремы сравнения.

Используя результаты этих теорем, докажем сходимость метода конечных разностей.

С этой целью в сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$ определим сеточную функцию z_n^j равенством

$$z_n^j = y_n^j - u(x_n, t_j), n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0.$$

Здесь y_n^j – решение разностной задачи (3.1)-(3.2) или (4.1)-(4.2), $u(x_n, t_j)$ – значение решения задачи (1.1), (2.5), (1.3) в узле (x_n, t_j) сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$.

Если найденное из этого равенства выражение y_n^j подставим в разностной задаче (3.1) - (3.2), то относительно функции z_n^j получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^{j+1} - z_0^{j+1}}{h} + \frac{z_1^j - z_0^j}{h} \right) + \alpha_0 \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} + \alpha_1 \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{z_0^{j+1} - z_0^j}{\tau} - \right. \\ \left. - b \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} \right) = -\psi_0^j, \\ \frac{z_n^{j+1} - z_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{z_{n-1}^{j+1} - 2z_n^{j+1} + z_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{z_{n-1}^j - 2z_n^j + z_{n+1}^j}{h^2} \right) - \frac{b}{2} (z_n^{j+1} + z_n^j) = \psi_n^j, \\ n = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z_N^{j+1} - z_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{z_N^j - z_{N-1}^j}{h} \right) + \beta_0 \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} + \beta_1 \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{z_N^{j+1} - z_N^j}{\tau} - b \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} \right) = \psi_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1,$$

$$z_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Здесь $\psi_n^j, n = 0, 1, 2, \dots, N$ – определяют погрешность аппроксимации разностной задачи (3.1)-(3.2). Для них при определенных условиях, наложенных на решение уравнения (1.1), очевидно, справедлива оценка

$$|\psi_n^j| \leq L(h^2 + \tau^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.6)$$

где $L > 0$ – некоторая постоянная.

Определим сеточную функцию \tilde{z}_n^j равенством

$$\tilde{z}_n^j = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (4.7)$$

где ξ – некоторая положительная постоянная.

Пусть $b < 0$. Для функции \tilde{z}_n^j после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} = \\ & = -bL\xi \cdot (h^2 + \tau^2)(2l - x_n) \geq -bL\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot l \geq L \cdot (h^2 + \tau^2), \\ & \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \end{aligned}$$

если $\xi \geq -\frac{1}{bl}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1} - \tilde{z}_0^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_1^j - \tilde{z}_0^j}{h} \right) + \alpha_0 \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \alpha_1 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} - b \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} \right) = \\ & = L\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \left(-1 + 2\alpha_0 l + \alpha_1 l + \frac{blh}{a^2} \right) = L\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \\ & \cdot \left(-1 + \alpha_0 l + (\alpha_0 + \alpha_1)l + \frac{blh}{a^2} \right) = -L\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \left(1 - \alpha_0 l - (\alpha_0 + \alpha_1)l - \frac{blh}{a^2} \right) = \\ & = -\bar{\psi}_0^j, \end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_0^j = L \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \left(1 - \alpha_0 l - (\alpha_0 + \alpha_1)l - \frac{blh}{a^2} \right)$ при $\xi = 1$ и

$$|\bar{\psi}_0^j| \geq L \cdot (h^2 + \tau^2), \quad \text{т.к. } \alpha_0 \leq 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \leq 0, \quad b < 0.$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_N^j - \tilde{z}_{N-1}^j}{h} \right) + \beta_0 \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \beta_1 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} - b \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} \right) = L\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \left(1 + (2\beta_0 + \beta_1)l - \frac{blh}{2a^2} \right) \geq L \cdot (h^2 + \tau^2),$$

если $1 + (2\beta_0 + \beta_1)l \geq \varepsilon > 0$, и $\xi \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для функции \tilde{z}_n^j имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1} - \tilde{z}_0^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_1^j - \tilde{z}_0^j}{h} \right) + \alpha_0 \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \alpha_1 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} - b \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} \right) = L\xi \cdot (h^2 + \tau^2) \cdot \left(-1 + 2\alpha_0 l + \alpha_1 l + \frac{blh}{a^2} \right) = -\bar{\psi}_0^j, \quad |\bar{\psi}_0^j| \geq L \cdot (h^2 + \tau^2), \\ & \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} \geq \\ & \geq L \cdot (h^2 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_N^j - \tilde{z}_{N-1}^j}{h} \right) + \beta_0 \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \beta_1 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} - b \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} \right) \geq L \cdot (h^2 + \tau^2),$$

если $b < 0$, $\xi = \max\left(1, -\frac{1}{bl}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

$$\tilde{z}_n^0 = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.9)$$

Сравнивая задачу (4.4) - (4.5) с задачей (4.8) - (4.9), в силу теоремы сравнения имеем

$$|z_n^j| \leq \tilde{z}_n^j, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0,$$

или

$$|y_n^j - u(x_n, t_j)| \leq L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot 3l, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (4.10)$$

где

$$\xi = \max\left(1, -\frac{1}{bl}, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть решение задачи (1.1), (2.5), (1.3) имеет в области $D = \{0 < x < l, \quad 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по x до четвертого, по t до третьего порядка и уравнение (1.1) выполняется и на

границах $x=0$ и $x=l$ области \bar{D} . Если выполняются условия (4.3) и $b < 0$, то решение разностной задачи (3.1)-(3.2) сходится к решению задачи (1.1), (2.5), (1.3). При этом имеет место оценка (4.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А.А., Южно Л.Ф. Метод решения нелокальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, т.54, №11, с.1752-1755.
2. Ханкишиев З.Ф. Решение одной смешанной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральным граничным условием методом конечных разностей. Научные вестн. Международный научный журнал. №5(10), 2019, с.114-127.
3. Khankishiyev Z.F. Solution of a nonlocal problem for a linear differential hyperbolic equations. Proceedings of the International conference devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences. Baku, 23-25 October 2019. pp. 302-305.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552 с.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.

PARABOLİK TİP XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR MƏSƏLƏNİN SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ

Z.F.XANKIŞIYEV

XÜLASƏ

Məqalədə parabolik tip xətti diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli bir məsələnin həlli tədqiq edilmişdir. İnteqral sərhəd şərtlərini lokal sərhəd şərtləri ilə əvəz etdikdən sonra, alınmış yeni məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulu tətbiq edilmiş, qurulmuş fərq məsələsinin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması üçün kafi şərtlər tapılmış və yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınmışdır.

Açar sözlər: sonlu fərqlər üsulu, inteqral sərhəd şərtləri, fərq məsələsi, approx-
simasiya, maksimum prinsipi, yığılma.

SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE PARABOLIC TYPE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Z.F.XANKIŞIYEV

SUMMARY

One problem for an equation of parabolic type with an integral boundary condition is considered in present paper. The corresponding difference problem is constructed with second order of approximation. The convergence of the method is proved and convergence rate is determined.

Keywords: finite difference method, integral boundary conditions, difference prob-
lem, approximation, maximum principle, convergence.

УДК 514.763

О ЛИФТАХ f – СТРУКТУР В РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ КОРЕПЕРОВ

Г.Д.ФАТТАЕВ

Бакинский Государственный Университет

h-fattayev@mail.ru

В работе рассматривается расслоение линейных кореперов дифференцируемого многообразия. Строятся лифты некоторых дифференциально-геометрических объектов из базового многообразия в тотальное пространство расслоения. При помощи этих лифтов исследуются свойства полного и горизонтального лифтов f -структур, заданных на базовом многообразии в расслоение линейных кореперов.

Ключевые слова: Расслоение кореперов, f -структура, тензор Нейенхейса, полный лифт, линейная связность, единичный тензор.

Понятие f – структуры ранга r на гладком многообразии M введено Яно в 1961 году [9]. По определению, данного Яно [9], [10], f – структура ранга r на $n = 2m$ – мерном гладком многообразии M , определяется заданием тензорного поля f типа (1,1) такого, что

$$f^3 + f = 0$$

и ранг аффинора f всюду на M равен r . Обзоры работ, посвященных изучению f – структур на многообразиях и их расслоенных пространствах, были опубликованы в сборниках и книгах [1], [2], [7], [8], [11]. Целью данной работы является изучение свойств лифтов (полной и горизонтальной) f – структуры из дифференцируемого $n = 2m$ – мерного многообразия M в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$. В разделе 2 кратко описываются основные определения и результаты, которые будут использованы позже, после чего свойства f – структур в расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ с применением операции полного лифта дифференциально геометрических объектов изучаются в разделе 3. В разделе 4 исследуется вопрос о горизонтальном лифте f – структуры из многообразия M в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$.

1. Предварительные сведения

Пусть M n -мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞ и $F^*(M)$ расслоение линейных кореперов многообразия M (см., [3], [4]). Расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ над M состоит из всех пар (x, u^*) , где x точка из M и u^* есть базис (корепер) для кокасательного пространства T_x^*M . Естественную проекцию расслоения $F^*(M)$ в M обозначим через π и определим по формуле $\pi(x, u^*) = x$. Пусть $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ система локальных координат в M , тогда корепер $u^* = (X^\alpha) = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ для T_x^*M можно выразить однозначно в виде $X^\alpha = X_i^\alpha (dx^i)_x$ и поэтому

$$\left(\pi^{-1}(U); x^1, x^2, \dots, x^n, X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^n \right)$$

является системой локальных координат в $F^*(M)$ (см., [5]). Индексы $i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ принимают значения в $\{1, 2, \dots, n\}$, а индексы A, B, C, \dots в $\{1, \dots, n, n+1, \dots, n+n^2\}$.

Положим $h_\alpha = \alpha \cdot n + h$. Очевидно, что индексы вида $h_\alpha, k_\beta, l_\gamma, \dots$ принимают значения в $\{n+1, \dots, n+n^2\}$. Множество всех дифференцируемых тензорных полей типа (r, s) на многообразии M обозначим через $\mathfrak{T}_s^r(M)$. Пусть ∇ симметричная линейная связность на M с коэффициентами Γ_{ij}^k . Рассмотрим векторное и ковекторное (1-форма) поля $V \in \mathfrak{T}_0^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ и пусть $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = \omega_i dx^i$ их локальные выражения в $U \subset M$, соответственно. Тогда полный и горизонтальный лифты ${}^C V, {}^H V \in \mathfrak{T}_0^1(F^*(M))$ векторного поля V и β -ый вертикальный лифт ${}^{V\beta} \omega \in \mathfrak{T}_0^1(F^*(M))$ ($\beta = 1, 2, \dots, n$) 1-формы ω в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$, как известно (см. [3], [4]), определены в виде

$${}^C V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} - X_j^\alpha \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha}, \quad (2.1)$$

$${}^H V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_j^\alpha \Gamma_{ik}^j V^k \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha}, \quad (2.2)$$

$$V_\beta \omega = \delta_\beta^\alpha \sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha} \quad (2.3)$$

относительно натурального репера $\{\partial_i, \partial_{i_\alpha}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha} \right\}$.

Отметим, что для произвольных векторных полей $V, W \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ справедливы следующие формулы, связанные со скобкой Ли (или коммутатором) векторных полей:

$$\begin{aligned} [{}^C V, {}^C W] &= {}^C [V, W], \\ [{}^H V, {}^H W] &= {}^H [V, W] + \gamma R(V, W), \end{aligned}$$

здесь $R(V, W) = [\nabla_V, \nabla_W] - \nabla_{[V, W]}$, $\gamma R(V, W)$ – вертикальное векторное поле на $F^*(M)$, определяемое в виде

$$\gamma R(V, W) = X_l^\alpha R_{ijk}^l V^i W^j \frac{\partial}{\partial X_k^\alpha}.$$

Пусть $F \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ некоторое тензорное поле типа (1,1), заданное на многообразии M и имеющее локальное выражение $F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ в $U \subset M$. Тогда полный и горизонтальный лифты ${}^C F, {}^H F \in \mathfrak{S}_1^1(F^*(M))$ тензорного поля F в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ определяются в виде [4], [5]:

$${}^C F = \begin{pmatrix} F_i^j & 0 \\ X_k^\alpha (\partial_i F_j^k - \partial_j F_i^k) & F_j^i \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$${}^H F = \begin{pmatrix} F_i^j & 0 \\ X_k^\alpha (F_i^m \Gamma_{mj}^k - F_j^m \Gamma_{mi}^k) & F_j^i \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

относительно натурального репера $\{\partial_i, \partial_{i_\alpha}\}$

Пусть $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M)$. Кручением тензорных полей A и B типа называется тензорное поле $S \in \mathfrak{S}_2^1(M)$, определяемое в виде (см., [11, стр. 35])

$$\begin{aligned} 2S(X, Y) &= [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y] - \\ &- A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M). \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $B = A$, тензорное поле $N \in \mathfrak{S}_2^1(M)$, определяемое в виде

$$N(X, Y) = S(X, Y) = [AX, AY] - A[X, AY] - A[AX, Y] + A^2[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M), \quad (2.7)$$

называется тензором Нейенхейса тензорного поля A .

Пользуясь определениями лифтов дифференциально-геометрических объектов, легко можно установить, что если $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M)$, $A, B \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, $S, Q \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, тогда

$${}^C A({}^C X) = {}^C(A(X)) + \gamma(L_X A), \quad (2.8)$$

здесь L_X – производная Ли вдоль векторного поля X ,

$${}^H A({}^H X) = {}^H(A(X)), \quad (2.9)$$

$${}^C A(\gamma S) = \gamma(SA), \quad (2.10)$$

здесь $SF \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ и $(SF)(X, Y) = S(X, FY)$,

$$(\gamma S){}^C X = \gamma S_X, \quad (2.11)$$

здесь $S_X \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ и $S_X(Y) = S(X, Y)$,

$${}^C A(\gamma B) = \gamma(BA), \quad (2.12)$$

$$({}^C A)^2 = {}^C(A^2) + \gamma N_A, \quad (2.13)$$

$$(\gamma S)\gamma(Q) = 0. \quad (2.14)$$

Например, справедливость равенства (2.8) устанавливается следующим образом. Пользуясь (2.1) и (2.4), находим:

$$\begin{aligned} ({}^C A({}^C X))^I &= ({}^C A({}^C X))^i = {}^C A_j^i {}^C X^j = {}^C A_j^i {}^C X^j + {}^C A_{j\beta}^i {}^C X^{j\beta} = \\ &= A_j^i X^j = {}^C(A(X))^i, \\ ({}^C A({}^C X))^I &= ({}^C A({}^C X))^i_\alpha = {}^C A_j^{i\alpha} {}^C X^j = {}^C A_j^{i\alpha} {}^C X^j + {}^C A_{j\beta}^{i\alpha} {}^C X^{j\beta} = \\ &= X_k^\alpha (\partial_j A_i^k - \partial_i A_j^k) X^j + A_i^j \delta_\beta^\alpha (-X_k^\beta \partial_j X^k) = X_k^\alpha \partial_j A_i^k X^j - \\ &- X_k^\alpha \partial_i A_j^k X^j - X_k^\alpha A_i^j \partial_j X^k = (-X_k^\alpha (\partial_i A_j^k) X^j - X_k^\alpha A_j^k (\partial_i X^j)) + \\ &+ X_k^\alpha (X^j \partial_j A_i^k + A_i^j \partial_j X^k - A_i^j \partial_j X^k) = -X_k^\alpha \partial_i (A_j^k X^j) + X_k^\alpha (L_X A)_i^k = \\ &= {}^C(A(X))^i_\alpha + X_k^\alpha (L_X A)_i^k. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует, что

$${}^C A({}^C X) = {}^C(A(X)) + \gamma(L_X A).$$

Отметим следующий необходимый результат.

Лемма 2.1 ([6]). (b) Пусть \tilde{S}, \tilde{T} тензорные поля типа (r, s) , $s > 0$, на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ такие, что

$$\tilde{S}({}^C X_1, \dots, {}^C X_s) = \tilde{T}({}^C X_1, \dots, {}^C X_s)$$

для произвольных векторных полей X_1, \dots, X_s на M . Тогда $\tilde{S} = \tilde{T}$.

Замечание . Утверждение Леммы 2.1 остается в силе, если все векторные поля ${}^C X_1, \dots, {}^C X_s$ заменить векторными полями вида $V^\beta \omega$, или ${}^H Y$, здесь $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M)$, $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$.

3. Полный лифт $.f$ – структуры в расслоение линейных кореперов

Пусть $M \rightarrow n = 2m$ – мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞ . Сперва мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $F \in \mathfrak{S}_1^1(M)$, тогда

$$\left({}^C F\right)^3 = {}^C \left(F^3\right) + \gamma(2S - FN), \quad (3.1)$$

здесь $.S$ – кручение тензорных полей $.F$ и $.F^2$, $.N$ – тензор Нейенхейса тензорного поля $.F$ и $(FN)(X, Y) = FN(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$.

Доказательство. Согласно (2.10) и (2.13), имеем:

$$\left({}^C F\right)^3 = {}^C F \left({}^C \left(F^2\right) + \gamma N \right) = {}^C F {}^C \left(F^2\right) + \gamma(NF). \quad (3.2)$$

Учитывая (2.8) и (2.12), для $\forall X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, получим:

$$\begin{aligned} {}^C F {}^C \left(F^2\right) {}^C X &= {}^C F \left({}^C \left(F^2(X)\right) + \gamma \left(L_X F^2\right) \right) = {}^C \left(F^3(X)\right) + \gamma \left(L_{F^2 X} F\right) + \gamma \left(\left(L_X F^2\right) F \right) = \\ &= {}^C \left(F^3\right) {}^C X + \gamma \left(- \left(L_X F^3\right) + L_{F^2 X} F + \left(L_X F^2\right) F \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из равенств (3.2) и (3.3) следует, что

$$\left({}^C F\right)^3 {}^C X = {}^C \left(F^3\right) {}^C X + \gamma G, \quad (3.4)$$

здесь

$$G = \left(L_X F^2\right) F + L_{F^2 X} F - L_X F^3 + (NF)_X.$$

Применив G к $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и пользуясь формулами (2.6) и (2.7), получим:

$$\begin{aligned} GY &= [X, F^3 Y] - F^2[X, FY] + [F^2 X, FY] - F[F^2 X, Y] - [X, F^3 Y] + F^3[X, Y] + \\ &+ [FX, F^2 Y] - F[X, F^2 Y] - F[FX, FY] + F^2[X, FY] = [FX, FY] + [FX, FY] + \\ &+ F^3[X, Y] + F^3[X, Y] - F[X, F^2 Y] - F[F^2 X, Y] - F^2[X, FY] - F^2[FX, Y] + \\ &+ \left\{ F^2[X, FY] - F[FX, FY] + F^2[FX, Y] - F^3[X, Y] \right\} = 2S(X, Y) - (FN)(X, Y), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$G = 2S_X - (FN)_X. \quad (3.5)$$

Таким образом, пользуясь формулами (2.12), (3.4) и (3.5), получим:

$$\left({}^C F\right)^3 C X = {}^C \left(F^3\right) C X + \gamma(2S_X - (FN)_X) = \left({}^C \left(F^3\right) + \gamma(2S - FN)\right) C X. \quad (3.6)$$

Применив Лемму 2.1 к (3.6), получим формулу (3.1). Тем самым, теорема доказана.

Из Теоремы 3.1 следует

Теорема 3.2. Пусть F является f -структурой на $n = 2m$ -мерном гладком многообразии M , N – тензором Нейенхейса для F , а S – кручением для F и F^2 . Тогда ${}^C F$ является f -структурой на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ тогда и только тогда, когда $2S = FN$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть F является f -структурой на $n = 2m$ -мерном гладком многообразии M , N – тензором Нейенхейса для F , а S – кручением для F и F^2 . Тогда

$${}^C F + \gamma \left((FN - 2S) \left(I + \frac{3}{2} F^2 \right) \right)$$

является f -структурой на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$, здесь I – единичный оператор.

Доказательство. Введем следующее обозначение

$$P = (FN - 2S) \left(I + \frac{3}{2} F^2 \right). \quad (3.7)$$

Пусть $X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, тогда по формуле (2.11), получим:

$$\left({}^C F + \gamma P\right) C X = {}^C F C X + \gamma P_X.$$

Следовательно, пользуясь равенствами (2.8) и (2.14), приходим к следующим соотношениям:

$$\left({}^C F + \gamma P\right)^2 C X = \left({}^C F\right)^2 C X + \gamma(P_X F) + \gamma P_{FX},$$

$$\left({}^C F + \gamma P\right)^3 C X = \left({}^C F\right)^3 C X + \gamma(P_X F^2 + P_{FX} F + P_{F^2 X}).$$

Таким образом, с применением Теоремы 3.1, получим:

$$\left({}^C F + \gamma P\right)^3 C X = \left({}^C F\right)^3 C X + \gamma(2S - FN) + \gamma(P_X F^2 + P_{FX} F + P_{F^2 X}).$$

По условию теоремы $F^3 = -F$, откуда следует, что для $\forall X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ равенство

$$\left({}^C F + \gamma P\right)^3 C X = -\left({}^C F + \gamma P\right) C X,$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$P_X + P_X F^2 + P_{FX} F + P_{F^2 X} = (FN - 2S)_X. \quad (3.8)$$

Заметим, что (3.8) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} P(X, Y) + P(X, F^2 Y) + P(FX, FY) + P(F^2 X, Y) = \\ = FN(X, Y) - 2S(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M). \end{aligned} \quad (3.9)$$

С другой стороны, на основе равенства (3.7), получим:

$$P(X, Y) = (FN)(X, Y) - 2S(X, Y) + \frac{3}{2} FN(X, F^2 Y) - 3S(X, F^2 Y),$$

откуда следует, что условие (3.9) удовлетворяется. Следовательно, для $\forall X \in \mathfrak{F}_0^1(M)$

$$\left({}^C F + \gamma P \right)^3 {}^C X + \left({}^C F + \gamma P \right) {}^C X = 0,$$

или

$$\left({}^C F + \gamma P \right)^3 + \left({}^C F + \gamma P \right) = 0.$$

Таким образом, тензорное поле ${}^C F + \gamma P$ является f -структурой на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$. Теорема доказана.

4. Горизонтальный лифт f -структуры в расслоение линейных кореперов

В этом разделе мы покажем, как можно использовать горизонтальные лифты для нахождения f -структуры в расслоении линейных кореперов $F^*(M)$.

Имеет место

Теорема 4.1. Пусть $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(M)$ и $F \in \mathfrak{F}_1^1(M)$. Тогда

$${}^H F \cdot {}^{V_\beta} \omega = {}^{V_\beta} (F\omega). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пользуясь формулами (2.3) и (2.5), получим:

$$\begin{aligned} \left({}^H F \cdot {}^{V_\beta} \omega \right)^I &= \left({}^H F \cdot {}^{V_\beta} \omega \right)^j = {}^H F_j^i {}^{V_\beta} \omega^j = {}^H F_j^i {}^{V_\beta} \omega^j + {}^H F_{j\sigma}^i {}^{V_\beta} \omega^{j\sigma} = \\ &= F_j^i \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

и

$${}^{V_\beta} (F\omega)^I = {}^{V_\beta} (F\omega)^i = 0,$$

поэтому

$$\left({}^H F \cdot {}^{V_\beta} \omega \right)^j = {}^{V_\beta} (F\omega)^i. \quad (4.2)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left({}^H F \cdot V_\beta \omega \right)^I &= \left({}^H F \cdot V_\beta \omega \right)^{i_\alpha} = {}^H F_j^{i_\alpha} V_\beta \omega^j = {}^H F_j^{i_\alpha} V_\beta \omega^j + {}^H F_{j\sigma}^{i_\alpha} V_\beta \omega^{j\sigma} = \\ &= F_i^j \delta_\sigma^\alpha \delta_\beta^\sigma \omega_j = F_i^j \delta_\beta^\alpha \omega_j, \end{aligned}$$

и

$$V_\beta (F\omega)^I = V_\beta (F\omega)^{i_\alpha} = \delta_\beta^\alpha F_i^j \omega_j,$$

откуда следует, что

$$\left({}^H F^{V_\beta} \omega \right)^{i_\alpha} = V_\beta (F\omega)^{i_\alpha}. \quad (4.3)$$

Основываясь, на соотношения (4.2) и (4.3), заключаем:

$${}^H F^{V_\beta} \omega = V_\beta (F\omega).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2. Пусть $F, G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$. Тогда

$${}^H F^H G + {}^H F^H G = {}^H (FG + GF). \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M)$, тогда из равенства (4.1), находим:

$${}^H F^H G^{V_\beta} \omega = {}^H F^H (\omega \circ G) = V_\beta (\omega \circ GF) = {}^H (GF)^{V_\beta} \omega,$$

следовательно,

$$\left({}^H F^H G + {}^H F^H G \right)^{V_\beta} \omega = {}^H (FG + GF)^{V_\beta} \omega. \quad (4.5)$$

Пусть $X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, тогда при помощи равенств (2.2) и (2.9), получим:

$${}^H F^H G^H X = {}^H F^H (GX) = V_\beta (FGX) = {}^H (FG)^H X,$$

откуда следует, что

$$\left({}^H F^H G + {}^H F^H G \right)^H X = {}^H (FG + GF)^H X. \quad (4.6)$$

Таким образом, искомый результат (4.4) получается из соотношений (4.5) и (4.6) с применением Леммы 2.1 и замечания, данного в разделе 2. Теорема доказана.

Предположим, что на $n = 2m$ – мерном дифференцируемом многообразии M задана f – структура F ранга r . Применяя Теоремы 4.2 на структурное тензорное поле F , получим:

$${}^H F^H F + {}^H F^H F = 2 \left({}^H F \right)^2 = {}^H (FF + FF) = 2 {}^H \left(F^2 \right),$$

следовательно,

$$\left({}^H F \right)^2 = {}^H \left(F^2 \right)$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \left({}^H F \right)^2 {}^H F + {}^H F \left({}^H F \right)^2 &= 2 \left({}^H F \right)^3 = {}^H \left(F^2 \right) {}^H F + {}^H F \left({}^H F \right)^2 = \\ &= {}^H \left(F^2 F + FF^2 \right) = 2 {}^H \left(F^3 \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left({}^H F\right)^3 = {}^H \left(F^3\right)$$

Более того, формула (2.5) показывает, что горизонтальный лифт единичного тензорного поля I типа (1,1) из многообразия M в расслоение линейных реперов $F^*(M)$ также является единичным тензорным полем типа (1,1). Поэтому, если $P(t)$ многочлен с переменной t , тогда справедливо следующее равенство:

$$P({}^H F) = {}^H (P(F)). \quad (4.7)$$

В частности, из равенства (4.7) следует, что если $F^3 + F = 0$, тогда $\left({}^H F\right)^3 + {}^H F = 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть на $n = 2m$ - мерном дифференцируемом многообразии M , снабженном симметричной аффинной связностью ∇ , задана f - структура F ранга r . Тогда ${}^H F$ является f - структурой ранга $r(1+n)$ на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cordero L.A., Dodson C.T., Leon de M. Differential geometry of frame bundles. Mathematics and its applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1989, 235 p.
2. Evtushik L.E., Lumiste U.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differential-geometric structures on manifolds // J. Soviet Math., 1980, v. 14, № 6, p. 1573-1719.
3. Fattayev H.D., Salimov A.A. Diagonal lift of metrics to coframe bundle // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2018, v. 44, № 2, p.328-337.
4. Fattayev H.D. About some differential-geometric structures on the coframe bundle // J. of Qafqaz University, 2010, v. 29, p.103-107.
5. Salimov A.A., Fattayev H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross- sections // Turk J Math., 2018, v. 42, № 4, p. 2035-2044.
6. Salimov A.A., Fattayev H.D. Lifts of derivations in the coframe bundle // Mediterr. J. Math., 2020, v. 17, 48, p. 1-12.
7. Polyakov N.D. Differential geometry of f - structure manifolds // J. Soviet Math., 1985, v. 29, p.1571-1592.
8. Shirokov A.P. Structures on differential manifolds // J. Soviet Math., 1975, v. 14, № 6, p. 555-590.
9. Yano K. On a structure f satisfying $f^3 + f = 0$ // University of Washington, Technical Reports, 1961, № 2.
10. Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$ // Tensor, N.S., 1963, v. 14, p. 9-19.
11. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles. New York: Marsel Dekker, Inc., 1973, 423 p.

XƏTTİ KOREPERLƏRİN LAYLANMASINDA f – STRUKTURLARIN LİFTLƏRİNƏ DAİR

H.D.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə diferensiallanan çoxobrazlının xətti koreperlərinin laylanmasına baxılır. Baza çoxobrazlısından bəzi diferensial-həndəsi obyektlərin laylanmanın total fəzasına liftləri qurulur. Bu liftlərin köməyi ilə bazada verilən f – strukturların xətti reperlərin laylanmasına tam və horizontal liftlərinin xassələri tədqiq olunur.

Açar sözlər: Koreperlərin laylanması, f – struktur, Neyenxeys tenzoru, tam lift, xətti rabitə, vahid tenzor.

ON LIFTS OF f - STRUCTURES IN THE BUNDLE OF LINEAR COFRAMES

H.D.FATTAYEV

SUMMARY

In this paper, we consider a bundle of linear coframes of a differentiable manifold. Lifts of some differential-geometric objects are constructed from the base manifold to the total bundle space. With the help of these lifts, the properties of complete and horizontal lifts of f -structures, defined on a base manifold to the bundle of linear coframes, are investigated.

Keywords: Bundle of coframes, f - structure, Nijenhuis tensor, complete lift, linear connection, unit tensor.

AMS Subject Classification: 35K05, 35A22, 33C10, 44A05, 42A38,44A10

TEMPERATURE DISTRIBUTION IN MOVING COMPOSITE BODIES
WHICH CONSISTS OF TWO RECTANGULAR
WITH A DIFFERENT PHYSICAL PARAMETER

G.R.GASIMOV*, Z.A.ABUSUTASH**

**Baku State University, Faculty of applied mathematics, Baku
gkurban@mail.ru*

***Department of Mathematics, Faculty of Science,
Elmergib University, Libya
moon_smile16@yahoo.com*

In this paper, a solution to the problem of heat conduction moving compound bodies with different physical parameters, which consists of two rectangular is considered. An exact solution to the problem in an analytical form is obtained by using the Cauchy's residue theory and applying the successive transformations method. Using a special way by taking Fourier transform with respect to x and y , also Laplace transform with respect to t , we get ordinary differential equation in the variable z . Moreover, a solution of this equation is given in the form of series.

Key words: heat conduction problem, general integral transforms theory, sequential integral transformation method, rest theory.

1. Introduction

Problems on conduction of heat in composite solids are usually solved by the sequence of integral transformations method. Thermal conductivity problem of the moving composite bodies has been considered by few researchers among of them Carslaw and Jaeger [1]. In cylindrical coordinates, an analytical solution of problems thermal conductivity of the moving bodies with finite size are obtained by Lotarev [3], Kuznetsova [4], and the extend the method to tackling multidimensional heat conduction in composite cylindrical shells. As calculation methods and results exhibit differently for varied types of cylindrical geometry, the source is presented in Tervola [5]. In cartesian coordinates, heat fluxes for temperature boundary conditions. Steady-state components of heat conduction solutions may have very slowly convergent series for temperatures were investigated by Beck et al. [6]; an analytical model to describe the three-dimensional temperature field for a finite plate with a heat source which moves

over its surface was established. The moving heat source causes cyclic heating of various plate areas example work is Kukla [8]. Studied thermal conductivity in the moving composite cylinder, and proved that to transcendental equation has infinitely, simple and real roots is obtained by [11], and these problems have a great importance in many engineering fields which intervention in the design of internal combustion engines, composite cylindrical shells are broadly used in contemporary, nuclear, aerospace, the factories of the production of military composite shells are broadly used in contemporary, nuclear, aerospace, water resources and many other industries. Classical heat conduction in shell structures is obviously very important in studying their thermal load and deformation. There exist a great amount of numerical programs for evaluating heat conduction performances in such structures. Our motivation in this paper is to investigate the problem of heat propagation in compound rectangular bodies with different physical parameters, and moves with velocity in the direction of the z-axis. Also, we use sequential of integral transformations like Fourier and Laplace transformations with corresponding inverse transformations, respectively to obtain a solution to the problem of the spread heat in the series form.

2. Formulation of the problem

Consider the composite solid which consists of two rectangular, and moves with velocity v in the direction of z-axis. On the joining surface (for $z = \ell_1$) there is no contact resistance. The formulation of this problem looks as follows: find solution to the equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i(x,y,z,t)}{\partial t} &= \kappa_i \Delta T_i - v \frac{\partial T_i}{\partial z}; i = 1,2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ z &\in ((i-1)\ell_1; \ell_1 + (i-1)\ell_2), a < b < \min\{\ell_1; \ell_2\}, t > 0, v = \text{const} \end{aligned} \quad (1)$$

with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2^{(i)} \right) T_i|_{x=0} &= -f_{0,i}(y, z, t), \\ \left(\alpha_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4^{(i)} \right) T_i|_{x=a} &= f_{a,i}(y, z, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)} \right) T_i|_{y=0} &= -g_{0,i}(x, z, t), \\ \left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)} \right) T_i|_{y=b} &= g_{b,i}(x, z, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2 \right) T_1|_{z=0} = -h_1(x, y, t), \quad (4)$$

$$\left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4 \right) T_2|_{z=\ell_1+\ell_2} = h_2(x, y, t), \quad (5)$$

at the junction $z = \ell_1$ the boundary conditions there are

$$T_1|_{z=\ell_1} = T_2|_{z=\ell_1}, k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}|_{z=\ell_1} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}|_{z=\ell_1}, \quad (6)$$

with the initial conditions are

$$T_i|_{t=0} = I_i(x, y, z). \quad (7)$$

Where T_i , κ_i , k_1 , and k_2 are the temperature, diffusivity, and the thermal conductivity of the substance that move with velocity v is constant, and $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$, $\alpha_4^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$, $\beta_3^{(i)}$, $\beta_4^{(i)}$, δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 are the coefficient of surface heat transfer are constants, and $I_i(x, y, z)$, $f_{0,i}(y, z, t)$, $f_{a,i}(y, z, t)$, $g_{0,i}(x, z, t)$, $g_{b,i}(x, z, t)$, $h_1(x, y, t)$, $h_2(x, y, t)$ are given functions.

3. Solving Method

Using successive transformations, the solution is organized follows.

The first stage: We choose a solution of this problem in the form:

$$T_i(x, y, z, t) = T_i^0(x, y, z, t) + C_{1,i}(y, z, t) \cdot f_{0,i}(y, z, t) + C_{2,i}(y, z, t) \cdot x \cdot f_{a,i}(y, z, t); \quad (8)$$

where $T_i^0(x, y, z, t)$ satisfies homogeneous boundary conditions as follows:

$$\left(\alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2^{(i)} \right) T_i^0|_{x=0} = 0, \quad (9)$$

$$\left(\alpha_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4^{(i)} \right) T_i^0|_{x=a} = 0.$$

Using (8) and boundary conditions (2), (9) we get:

$$\alpha_2^{(i)} f_{0,i} \cdot C_{1,i} - \alpha_1^{(i)} f_{a,i} \cdot C_{2,i} = f_{0,i}, \quad (10)$$

$$\alpha_4^{(i)} f_{0,i} \cdot C_{1,i} + \left(\alpha_3^{(i)} + a\alpha_4^{(i)} \right) f_{a,i} \cdot C_{2,i} = f_{a,i}.$$

Using the solution of this system (10) with respect to $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, we obtain

$T_i(x, y, z, t)$ as:

$$T_i = T_i^0 + \frac{1}{\alpha^{(i)}} \left[\left(\alpha_3^{(i)} + a\alpha_4^{(i)} \right) f_{0,i} + \alpha_1^{(i)} f_{a,i} + \left(\alpha_2^{(i)} f_{a,i} - \alpha_4^{(i)} f_{0,i} \right) x \right]. \quad (11)$$

Writing Eq. (11) as follows:

$$T_i = T_i^0 + f_i. \quad (12)$$

The second stage: Substituting the relation (12) in the relation (1), we obtain

$$\frac{\partial T_i^0}{\partial t} = \kappa_i \Delta T_i^0 - v \frac{\partial T_i^0}{\partial z} + \underbrace{\left(\kappa_i \Delta f_i - \frac{\partial f_i}{\partial t} - v \frac{\partial f_i}{\partial z} \right)}_{\equiv F_i^0(x, y, z, t)}; \quad (13)$$

from the relations (2), (3), (4), (5) we obtain the following corresponding:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2^{(i)} \right) T_i^0|_{x=0} &= 0; \\ \left(\alpha_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4^{(i)} \right) T_i^0|_{x=a} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)}\right) T_i^0 \Big|_{y=0} = \underbrace{-g_{0,i}(x, z, t) - \left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)}\right) f_i \Big|_{y=0}}_{\equiv -G_{0,i}^0(x,z,t)}, \quad (15)$$

$$\left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)}\right) T_i^0 \Big|_{y=b} = \underbrace{g_{b,i}(x, z, t) - \left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)}\right) f_i \Big|_{y=b}}_{\equiv G_{b,i}^0(x,z,t)} ;$$

$$\left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2\right) T_1^0 \Big|_{z=0} = \underbrace{-h_1(x, y, t) - \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2\right) f_1 \Big|_{z=0}}_{\equiv -H_1^0(x,y,t)} ; \quad (16)$$

$$\left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4\right) T_2^0 \Big|_{z=\ell \equiv \ell_1 + \ell_2} = \underbrace{h_2(x, y, t) - \left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4\right) f_2 \Big|_{z=\ell}}_{\equiv H_2^0(x,y,t)} ; \quad (17)$$

from the boundary conditions (6) we obtain

$$(T_1^0 - T_2^0) \Big|_{z=\ell_1} = \underbrace{(f_2 - f_1) \Big|_{z=\ell_1}}_{\equiv L_{1,0}^0(x,y,t)}, \quad (18)$$

$$\left(k_1 \frac{\partial T_1^0}{\partial z} - k_2 \frac{\partial T_2^0}{\partial z}\right) \Big|_{z=\ell_1} = \underbrace{\left(k_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - k_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) \Big|_{z=\ell_1}}_{\equiv L_{1,1}^0(x,y,t)} ;$$

from the initial conditions (7) we obtain

$$T_i^0 \Big|_{t=0} = \underbrace{I_i(x, y, z) - f_i \Big|_{t=0}}_{\equiv E_i^0(x,y,z)} \quad (19)$$

The third stage: To assign the solution of the problem (13)-(19), we apply the Fourier transform with respect to x namely:

$$T_{i,x}^0(y, z, t; n) \equiv \frac{1}{a_n} \int_0^a T_i^0(x, y, z, t) \varphi_{i,n}(x) dx;$$

$$a_n = \int_0^a \varphi_{i,n}^2(x) dx, n = 1, 2, \dots,$$

on the basis of the theory of integral transformations [5], the kernel $\varphi_{i,n}(x)$ of this transformation assignment as solution of Sturm- Liouville problem in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K_i(x)}{dx^2} + \lambda_i^2 K_i(x) &= 0, 0 < x < a, \\ \left(\alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2^{(i)}\right) K_i \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left(\alpha_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4^{(i)}\right) K_i \Big|_{x=a} &= 0. \end{aligned}$$

$\varphi_{i,n}(x)$ are the eigenfunctions of Sturm- Liouville problem in the following form:

$$\varphi_{i,n}(x) = \lambda_{i,n} \alpha_1^{(i)} \cos \lambda_{i,n} x + \alpha_2^{(i)} \sin \lambda_{i,n} x;$$

where parameter $\lambda_{i,n}$, $n = 1,2$, are the eigenvalues which satisfies the following equation:

$$tg\lambda_i a = \frac{\lambda_i(\alpha_1^{(i)}\alpha_4^{(i)} + \alpha_2^{(i)}\alpha_3^{(i)})}{\lambda_i^2\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(i)}\alpha_4^{(i)}};$$

from the relations (13) and(14) we obtain on the equation of Fourier transform with respect to $T_{i,x}^0(y, z, t; n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} T_{i,x}^0(y, z, t; n) = \\ & = -\kappa_i \lambda_{i,n}^2 T_{i,x}^0 + \kappa_i \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T_{i,x}^0 - \nu \frac{\partial}{\partial z} T_{i,x}^0 + F_{i,x}^0(y, z, t; n); \end{aligned} \quad (20)$$

from the boundary conditions (15), (16), (17) we obtain the corresponding relations:

$$\left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)} \right) T_{i,x}^0|_{y=0} = -G_{0,i,x}^0(z, t; n), \quad (21)$$

$$\left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)} \right) T_{i,x}^0|_{y=b} = G_{b,i,x}^0(z, t; n);$$

$$\left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2 \right) T_{1,x}^0|_{z=0} = -H_{1,x}^0(y, t; n); \quad (22)$$

$$\left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4 \right) T_{2,x}^0|_{z=\ell} = H_{2,x}^0(y, t; n); \quad (23)$$

from the boundary condition (18) we obtain

$$\left(T_{1,x}^0 - T_{2,x}^0 \right) \Big|_{z=\ell_1} = L_{1,0,x}^0(y, t; n),$$

$$\left(k_1 \frac{\partial}{\partial z} T_{1,x}^0 - k_2 \frac{\partial}{\partial z} T_{2,x}^0 \right) \Big|_{z=\ell_1} = L_{1,1,x}^0(y, t; n); \quad (24)$$

From the initial conditions (19) we obtain

$$T_{i,x}^0|_{t=0} = E_{i,x}^0|_{t=0}(y, z, n); \quad (25)$$

where $F_{i,x}^0(y, z, t; n)$, $G_{0,i,x}^0(z, t; n)$, $G_{b,i,x}^0(z, t; n)$, $H_{1,x}^0(y, t; n)$, $H_{2,x}^0(y, t; n)$,

$L_{1,0,x}^0(y, t; n)$, $L_{1,1,x}^0(y, t; n)$ and $E_{i,x}^0(y, z; n)$ representation of Fourier with

respect to x for functions

$$F_i^0(x, y, z, t), G_{0,i}^0(x, z, t), G_{b,i}^0(x, z, t), H_1^0(x, y, t), H_2^0(x, y, t), L_{1,0}^0(x, y, t),$$

$$L_{1,1}^0(x, y, t) \text{ and } E_i^0(x, y, z)$$

The fourth stage: We apply the Fourier transform with respect to y, in order to we choose

a solution of the problem (20)-(25) in the form:

$$\begin{aligned} T_{i,x}^0(y, z, t; n) &= T_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n) + B_{1,i}(z, t) \cdot G_{0,i,x}^0(z, t; n) + B_{2,i}(z, t) \cdot y \cdot \\ & G_{b,i,x}^0(z, t; n); \end{aligned} \quad (26)$$

where $T_{i,x}^0$ satisfies homogeneous boundary conditions as follows:

$$\begin{aligned} \left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)}\right) T_{i,x}^{0,0} \Big|_{y=0} &= 0, \\ \left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)}\right) T_{i,x}^{0,0} \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Using the relations (21), (26), (27) we get:

$$\begin{aligned} T_{i,x}^0(y, z, t; n) &= T_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n) + \frac{1}{\beta^{(i)}} \left(\beta_3^{(i)} + b\beta_4^{(i)} - \beta_4^{(i)} \cdot y\right) G_{0,i,x}^0(z, t; n) \\ &\quad + \frac{1}{\beta^{(i)}} \left(\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} \cdot y\right) G_{b,i,x}^0(z, t; n) \equiv T_{i,x}^{0,0} + G_{i,x}^0; \\ \beta^{(i)} &\equiv \beta_2^{(i)} \beta_3^{(i)} + \beta_1^{(i)} \beta_4^{(i)} + b\beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)}. \end{aligned} \quad (28)$$

From the Eq.(20) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n) &= \kappa_i \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) T_{i,x}^{0,0} - \left(\kappa_i \lambda_{i,n}^2 + \nu \frac{\partial}{\partial z}\right) T_{i,x}^{0,0} + F_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n); \\ F_{i,x}^{0,0} &\equiv F_{i,x}^0 + \left(\kappa_i \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \left(\kappa_i \lambda_{i,n}^2 + \nu \frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right) G_{i,x}^0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$G_{i,x}^0 \equiv \left(\frac{1}{\beta^{(i)}} \left(\beta_3^{(i)} + b\beta_4^{(i)} - \beta_4^{(i)} \cdot y\right) G_{0,i,x}^0 + \frac{1}{\beta^{(i)}} \left(\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} \cdot y\right) G_{b,i,x}^0\right);$$

from the boundary conditions (22), (23) we obtain

$$\begin{aligned} \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2\right) T_{1,x}^{0,0} \Big|_{z=0} &= \\ \underbrace{-H_{1,x}^0 - \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2\right) G_{1,x}^0}_{\equiv -H_{1,x}^{0,0}(y,t;n)}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4\right) T_{2,x}^{0,0} \Big|_{z=\ell} = \underbrace{H_{2,x}^0 - \left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4\right) G_{2,x}^0}_{\equiv H_{2,x}^{0,0}(y,t;n)}; \quad (31)$$

from the boundary conditions (24) we obtain

$$\begin{aligned} \left(T_{1,x}^{0,0} - T_{2,x}^{0,0}\right) \Big|_{z=\ell_1} &= \underbrace{L_{1,0,x}^0 - \left(G_{1,x}^0 - G_{2,x}^0\right) \Big|_{z=\ell_1}}_{\equiv L_{1,0,x}^{0,0}(y,t;n)}, \\ \left(k_1 \frac{\partial}{\partial z} T_{1,x}^{0,0} - k_2 \frac{\partial}{\partial z} T_{2,x}^{0,0}\right) \Big|_{z=\ell_1} &= \underbrace{L_{1,1,x}^0 - \left(k_1 \frac{\partial}{\partial z} G_{1,x}^0 - k_2 \frac{\partial}{\partial z} G_{2,x}^0\right) \Big|_{z=\ell_1}}_{\equiv L_{1,1,x}^{0,0}(y,t;n)}; \end{aligned} \quad (32)$$

from the initial conditions (25) we obtain

$$T_{i,x}^{0,0} \Big|_{t=0} = \underbrace{E_{i,x}^0 - G_{i,x}^0 \Big|_{t=0}}_{\equiv E_{i,x}^{0,0}(y,z;n)}. \quad (33)$$

The fifth stage: We apply the Fourier transform with respect to y of the relations (29)-(33):

$$T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \equiv \frac{1}{b_m} \int_0^b T_{i,x}^0(y, z, t; n) \psi_{i,m}(y) dy; \quad (34)$$

$$b_m = \int_0^b \psi_{i,m}^2(y) dy, m = 1, 2, \dots,$$

$\psi_{i,m}(y)$ are the solution of Sturm- Liouville problem in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_i(y)}{dy^2} + \mu_i^2 Q_i(y) &= 0, 0 < y < b, \\ \left(\beta_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} - \beta_2^{(i)} \right) Q_i(y) \Big|_{y=0} &= 0, \\ \left(\beta_3^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} + \beta_4^{(i)} \right) Q_i(y) \Big|_{y=b} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

The general solution is:

$$\psi_{i,m}(y) = \mu_{i,m} \beta_1^{(i)} \cos \mu_{i,m} y + \beta_2^{(i)} \sin \mu_{i,m} y,$$

where $\mu_{i,m}$ are the eigenvalues which satisfies the following equation:

$$\text{tg } \mu_i b = \frac{\mu_i (\beta_1^{(i)} \beta_4^{(i)} + \beta_2^{(i)} \beta_3^{(i)})}{\mu_i^2 \beta_1^{(i)} \beta_2^{(i)} - \beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)}}, m = 1, 2, \dots \quad (36)$$

the roots of Eq. (36) are all real, simple, and have arithmetic numbers. Using the Fourier transform with respect to y for problem (29)-(33), and the relations (27)-(29), we obtain the following:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \\ = \kappa_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_{i,x,y}^{0,0} - \left(\kappa_i \lambda_{i,n}^2 + \kappa_i \mu_{i,m}^2 + \nu \frac{\partial}{\partial z} \right) T_{i,x,y}^{0,0} \\ + F_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m); \end{aligned} \quad (37)$$

$$F_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \equiv \frac{1}{b_m} \int_0^b F_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n) \psi_{i,m}(y) dy;$$

from the boundary conditions (30), (31) we obtain

$$\left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2 \right) T_{1,x,y}^{0,0} \Big|_{z=0} = -H_{1,x,y}^{0,0}(t; n, m); \quad (38)$$

$$\left(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4 \right) T_{2,x,y}^{0,0} \Big|_{z=\ell} = H_{2,x,y}^{0,0}(t; n, m); \quad (39)$$

from the boundary conditions (32), we obtain

$$\left(T_{1,x,y}^{0,0} - T_{2,x,y}^{0,0} \right) \Big|_{z=\ell_1} = L_{1,0,x,y}^{0,0}(t; n, m), \quad (40)$$

$$\left(k_1 \frac{\partial}{\partial z} T_{1,x,y}^{0,0} - k_2 \frac{\partial}{\partial z} T_{2,x,y}^{0,0} \right) \Big|_{z=\ell_1} = L_{1,1,x,y}^{0,0}(t; n, m);$$

and from the condition (33) we obtain

$$T_{i,x,y}^{0,0} \Big|_{t=0} = E_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m). \quad (41)$$

The sixth stage: Now we Apply the Laplace transform with respect to t of (37)-(41) namely:

$$\bar{T}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m, p) = \int_0^\infty T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) e^{-pt} dt. \quad (42)$$

The subsidiary equation is

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{T}_{i,x,y}^{0,0} - \frac{\nu}{\kappa_i} \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_{i,x,y}^{0,0} - \left(\lambda_{i,n}^2 + \mu_{i,m}^2 + \frac{\rho}{\kappa_i} \right) \bar{T}_{i,x,y}^{0,0} = \frac{-1}{\kappa_i} \left(\bar{F}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m, p) + \bar{E}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m) \right); \quad (43)$$

where

$$\bar{F}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m, p) \equiv \int_0^\infty F_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) e^{-pt} dt;$$

With boundary conditions (38), (39) we get

$$(\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} - \delta_2) \bar{T}_{1,x,y}^{0,0} |_{z=0} = -\bar{H}_{1,x,y}^{0,0}(n, m, p); \quad (44)$$

$$(\delta_3 \frac{\partial}{\partial z} + \delta_4) \bar{T}_{2,x,y}^{0,0} |_{z=\ell} = \bar{H}_{2,x,y}^{0,0}(n, m, p); \quad (45)$$

From the boundary conditions (40):

$$\bar{T}_{1,x,y}^{0,0} - \bar{T}_{2,x,y}^{0,0} |_{z=\ell_1} = \bar{L}_{1,0,x,y}^{0,0}(n, m, p), \quad (46)$$

$$(k_1 \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_{1,x,y}^{0,0} - k_2 \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_{2,x,y}^{0,0}) |_{z=\ell_1} = \bar{L}_{1,1,x,y}^{0,0}(n, m, p);$$

where $\bar{H}_{1,x,y}^{0,0}(n, m, p)$, $\bar{H}_{2,x,y}^{0,0}(n, m, p)$, $\bar{L}_{1,0,x,y}^{0,0}(n, m, p)$ and $\bar{L}_{1,1,x,y}^{0,0}(n, m, p)$ representation of Laplace with respect to t for functions $H_{1,x,y}^{0,0}(t, n, m)$, $H_{2,x,y}^{0,0}(t, n, m)$, $L_{1,0,x,y}^{0,0}(t, n, m)$ and $L_{1,1,x,y}^{0,0}(t, n, m)$.

The seventh stage: We enter symbols in the following form:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m, p) &\equiv T_i^*(z), \\ \lambda_{i,m}^2 + \mu_{i,m}^2 + \frac{\rho}{\kappa_i} &\equiv q_{i,n,m}^2 \sim q_i^{*2}, \\ -\frac{1}{\kappa_i} (\bar{F}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m, p) + \bar{E}_{i,x,y}^{0,0}(z; n, m)) &\equiv F_i^*(z), \\ \bar{H}_{1,x,y}^{0,0}(n, m, p) &\equiv H_1^*, \quad \bar{H}_{2,x,y}^{0,0}(n, m, p) \equiv H_2^*, \\ \bar{L}_{1,0,x,y}^{0,0}(n, m, p) &\equiv L_{1,0}^*, \quad \bar{L}_{1,1,x,y}^{0,0}(n, m, p) \equiv L_{1,1}^*. \end{aligned}$$

Using these symbols, as well the problem Eq. (43) - Eq. (46) written as follows:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_i^*(z) - \frac{\nu}{\kappa_i} \frac{d}{dz} T_i^*(z) - q_i^{*2} T_i^*(z) = F_i^*(z), \quad (47)$$

$$\left(\delta_1 \frac{d}{dz} - \delta_2 \right) T_1^*(z) |_{z=0} = H_1^*, \quad (48)$$

$$\left(\delta_3 \frac{d}{dz} + \delta_4 \right) T_2^*(z) |_{z=\ell} = H_2^*, \quad (49)$$

$$(T_1^*(z) - T_2^*(z)) |_{z=\ell_1} = L_{1,0}^*, \quad (50)$$

$$\left(k_1 \frac{d}{dz} T_1^*(z) - k_2 \frac{d}{dz} T_2^*(z) \right) |_{z=\ell_1} = L_{1,1}^*. \quad (51)$$

Assign general solution of the equation corresponding homogeneous

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} T_i^*(z) - \frac{\nu}{\kappa_i} \frac{d}{dz} T_i^*(z) - q_i^{*2} T_i^*(z) &= 0: \\ T_i^*(z) &= (C_{1,i}^* sh \omega_i z + C_{2,i}^* ch \omega_i z) e^{\nu z / (2\kappa_i)}, \end{aligned} \quad (52)$$

where

$$\omega_i \equiv \sqrt{\left(\frac{v}{2\kappa_i}\right)^2 + q_i^{*2}}.$$

Using fundamental solution of the equation (47), we write general solution of the equation non-homogeneous:

$$T_1^*(z) = e^{vz/(2\kappa_1)} (C_{1,1}^* sh\omega_1 z + C_{2,1}^* ch\omega_1 z) + \frac{1}{2\omega_1} \int_0^{\ell_1} \text{sign}(z - \zeta) e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\zeta)} [e^{\omega_1(z-\zeta)} - e^{-\omega_1(z-\zeta)}] F_1^*(\zeta) d\zeta, \quad (53)$$

$$T_2^*(z) = e^{vz/(2\kappa_2)} (C_{1,2}^* sh\omega_2 z + C_{2,2}^* ch\omega_2 z) + \frac{1}{2\omega_2} \int_{\ell_1}^{\ell} \text{sign}(z - \zeta) e^{\frac{v}{2\kappa_2}(z-\zeta)} [e^{\omega_2(z-\zeta)} - e^{-\omega_2(z-\zeta)}] F_2^*(\zeta) d\zeta. \quad (54)$$

We can write the two last relations as follows:

$$T_1^*(z) = e^{vz/(2\kappa_1)} (C_{1,1}^* sh\omega_1 z + C_{2,1}^* ch\omega_1 z) - \frac{1}{2\omega_1} \left\{ \int_0^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} - \omega_1\right)(z-\zeta)} F_1^*(\zeta) d\zeta + \int_z^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} + \omega_1\right)(z-\zeta)} F_1^*(\zeta) d\zeta \right\}, \quad (55)$$

$$T_2^*(z) = e^{vz/(2\kappa_2)} (C_{1,2}^* sh\omega_2 z + C_{2,2}^* ch\omega_2 z) - \frac{1}{2\omega_2} \left\{ \int_{\ell_1}^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} - \omega_2\right)(z-\zeta)} F_2^*(\zeta) d\zeta + \int_z^{\ell} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} + \omega_2\right)(z-\zeta)} F_2^*(\zeta) d\zeta \right\}. \quad (56)$$

The constants $C_{1,1}^*$, $C_{2,1}^*$, $C_{1,2}^*$ and $C_{2,2}^*$ are found from (48), (55) in the following form:

$$\delta_1 \omega_1 C_{1,1}^* + \left(\frac{\delta_1 v}{2\kappa_1} - \delta_2\right) C_{2,1}^* = \underbrace{H_1^* + \left[\frac{\delta_1}{2\omega_1} \left(\frac{v}{2\kappa_1} + \omega_1\right) - \frac{\delta_2}{2\omega_1} \right] \int_0^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} + \omega_1\right)\zeta} F_1^*(\zeta) d\zeta}_{V_1(n,m,p)}, \quad (57)$$

from (49) and (56) we find that:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4\right) sh\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell \right] C_{1,2}^* \\ & + \left[\left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4\right) ch\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 sh\omega_2 \ell \right] C_{2,2}^* = \\ & = \underbrace{H_2^* e^{-v\ell/(2\kappa_2)} + \frac{1}{2\omega_2} \left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} - \delta_3 \omega_2 + \delta_4\right) e^{-v\ell/(2\kappa_2)} \int_{\ell_1}^{\ell} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} - \omega_2\right)(\ell-\zeta)} F_2^*(\zeta) d\zeta}_{V_2(n,m,p)}. \end{aligned} \quad (58)$$

From the relations (50), (51), (55) and (56), we obtain:

$$\begin{aligned} & \left(e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1} \right) C_{1,1}^* + \left(e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1} \right) C_{2,1}^* - \\ & - \left(e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2} sh\omega_2 \ell_1} \right) C_{1,2}^* - \left(e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2} ch\omega_2 \ell_1} \right) C_{2,2}^* = \end{aligned}$$

$$= L_{1,0}^* + \underbrace{\frac{1}{2\omega_1} \int_0^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} - \omega_1\right)(\ell_1 - \zeta)} F_1^*(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2\omega_2} \int_{\ell_1}^{\ell} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} + \omega_2\right)(\ell_1 - \zeta)} F_2^*(\zeta) d\zeta}_{V_3(n,m,p)}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & k_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right) e^{v\ell_1/(2\kappa_1)} C_{1,1}^* + k_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 \right. \\ & \quad \left. + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1 \right) e^{v\ell_1/(2\kappa_1)} C_{2,1}^* \\ & - k_2 \left(\frac{v}{2\kappa_2} sh\omega_2 \ell_1 + \omega_2 ch\omega_2 \ell_1 \right) e^{v\ell_1/(2\kappa_2)} C_{1,2}^* - k_2 \left(\frac{v}{2\kappa_2} ch\omega_2 \ell_1 \right. \\ & \quad \left. + \omega_2 sh\omega_2 \ell_1 \right) e^{v\ell_1/(2\kappa_2)} C_{2,2}^* \end{aligned} \quad (60)$$

$$= L_{1,1}^* + \underbrace{\frac{k_1}{2\omega_1} \left(\frac{v}{2\kappa_1} - \omega_1 \right) \int_0^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} - \omega_1\right)(\ell_1 - \zeta)} F_1^*(\zeta) d\zeta - \frac{k_2}{2\omega_2} \left(\frac{v}{2\kappa_2} + \omega_2 \right) \int_{\ell_1}^{\ell} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} + \omega_2\right)(\ell_1 - \zeta)} F_2^*(\zeta) d\zeta}_{V_4(n,m,p)}.$$

The solution of the equations (57)-(60), can be found from using the method of Kramer, hence the determinant this system as:

$$\Delta^* = e^{v\ell_1 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)}.$$

$$\begin{vmatrix} \delta_1 \omega_1 e^{-\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} & \left(\frac{\delta_1 v}{2\kappa_1} - \delta_2 \right) e^{-\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4 \right) sh\omega_2 \ell & \left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4 \right) ch\omega_2 \ell \\ & & + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell e^{-\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}} & + \delta_3 \omega_2 sh\omega_2 \ell e^{-\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}} \\ sh\omega_1 \ell_1 & ch\omega_1 \ell_1 & -sh\omega_2 \ell_1 & -ch\omega_2 \ell_1 \\ k_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 \right. & k_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 \right. & -k_2 \left(\frac{v}{2\kappa_2} sh\omega_2 \ell_1 \right. & -k_2 \left(\frac{v}{2\kappa_2} ch\omega_2 \ell_1 \right. \\ \left. + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right) & \left. + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1 \right) & \left. + \omega_2 ch\omega_2 \ell_1 \right) & \left. + \omega_2 sh\omega_2 \ell_1 \right) \end{vmatrix}$$

after the mathematical calculations, we have:

$$\Delta^*(p) \equiv \Delta^*(n, m, p) = e^{\frac{v\ell_1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)} \Delta_0(p) \cdot k_1, \quad (61)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_0(p) \equiv \Delta_0(n, m, p) &= \left[\left(\frac{\delta_1 v}{2\kappa_1} - \delta_2 \right) \left(\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right) - \right. \\ & \quad \left. \delta_1 \omega_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1 \right] \left[\left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4 \right) sh\omega_2 \ell_2 + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell_2 \right] - k \left[\left(\frac{\delta_1 v}{2\kappa_1} - \delta_2 \right) sh\omega_1 \ell_1 \right. \\ & \quad \left. - \delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right] \left[\left(\frac{v}{2\kappa_2} \left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4 \right) - \delta_3 \omega_2^2 \right) sh\omega_2 \ell_2 - \delta_4 \omega_2 ch\omega_2 \ell_2 \right], \end{aligned}$$

$$k \equiv \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega_i \equiv \sqrt{\left(\frac{v}{2\kappa_2}\right)^2 + \lambda_{i,n}^2 + \mu_{i,m}^2 + \left(\frac{p}{\kappa_i}\right)}, \quad i = 1, 2.$$

$C_{1,1}^* \equiv C_{1,1}^*(n, m, p)$ is found from using the method of Kramer in the following form

$$C_{1,1}^* \equiv \Delta_{1,1}^*(p)/\Delta^*(p);$$

where $\Delta_{1,1}^*(p) \equiv \Delta_{1,1}^*(n, m, p)$ as follows:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1}^*(n, m, p) = & e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_2)}} * \{k_1 V_1(n, m, p) e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_1)}} [kch\omega_1\ell_1 \left(\left(\frac{v}{2\kappa_2}\delta_{3,4} - \delta_3\omega_2^2\right) \right. \\ & \cdot sh\omega_2\ell_2 - \delta_4\omega_2ch\omega_2\ell_2) - \left(\frac{v}{2\kappa_1}ch\omega_1\ell_1 + \omega_1sh\omega_1\ell_1\right) \\ & \cdot (\delta_3\omega_2ch\omega_2\ell_2 + \delta_{3,4}sh\omega_2\ell_2)] + k_2 V_2(n, m, p) e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_2)}} \\ & \cdot \delta_{1,2}\omega_2 + k_2 V_3(n, m, p) \delta_{1,2} [\delta_4\omega_2ch\omega_2\ell_2 + (\delta_3\omega_2^2 - \\ & \left. \frac{v}{2\kappa_2}\delta_{3,4})sh\omega_2\ell_2] \right. \\ & \left. + V_4(n, m, p) \delta_{1,2} [\delta_3\omega_2ch\omega_2\ell_2 + \delta_{3,4}sh\omega_2\ell_2]\}; \quad (62) \end{aligned}$$

where we introduced the following symbols:

$$\delta_{1,2} \equiv \left(\frac{\delta_1 v}{2\kappa_1} - \delta_2\right), \quad \delta_{3,4} \equiv \left(\frac{\delta_3 v}{2\kappa_2} + \delta_4\right).$$

We have

$$C_{2,1}^* \equiv C_{2,1}^*(n, m, p) = \Delta_{2,1}^*(n, m, p)/\Delta^*(p);$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1}^*(n, m, p) = & e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_2)}} \{V_1(n, m, p) [k_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1\ell_1 + \omega_1ch\omega_1\ell_1\right) (\delta_{3,4}sh\omega_2\ell_2 \\ & + \delta_3\omega_2ch\omega_2\ell_2) - k_2 sh\omega_1\ell_1 \left(\left(\frac{v}{2\kappa_2}\delta_{3,4} - \delta_3\omega_2^2\right) sh\omega_2\ell_2 \right. \\ & \left. - \delta_4\omega_2ch\omega_2\ell_2\right)] e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_2)}} \\ & - V_2(n, m, p) k_2 \delta_1 \omega_1 \omega_2 e^{\frac{v\ell_1}{(2\kappa_2)}} + \\ & V_3(n, m, p) k_2 \delta_1 \omega_1 \left[\left(\frac{v}{2\kappa_2}\delta_{3,4} - \delta_3\omega_2^2\right) sh\omega_2\ell_2 \right. \\ & \left. - \delta_4\omega_2ch\omega_2\ell_2\right] - V_4(n, m, p) \delta_1 \omega_1 (\delta_{3,4}sh\omega_2\ell_2 + \\ & \left. \delta_3\omega_2ch\omega_2\ell_2)\}. \quad (63) \end{aligned}$$

We have

$$C_{1,2}^*(n, m, p) = \Delta_{1,2}^*(n, m, p)/\Delta^*(p);$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2}^*(n, m, p) = & e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} \{-V_1(n, m, p) * k_1 \omega_1 (\delta_{3,4} ch\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 sh\omega_2 \ell) e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} \\ & - V_2(n, m, p) \\ & \cdot [k_1 (\delta_2 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \cdot ch\omega_2 \ell_1 + (\delta_1 \omega_1^2 - \frac{v}{2\kappa_1} \delta_{1,2}) sh\omega_1 \ell_1 \cdot ch\omega_2 \ell_1) \\ & + k_2 (\frac{v}{2\kappa_2} ch\omega_2 \ell_1 + \omega_2 sh\omega_2 \ell_1) (\delta_{1,2} sh\omega_1 \ell_1 - \\ & \delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1) e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}} - V_3(n, m, p) k_1 \\ & \cdot [(\delta_{3,4} ch\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 sh\omega_2 \ell) (\delta_1 \omega_1 (\frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1) - \\ & \delta_{1,2} (\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 \\ & + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1))] + V_4(n, m, p) (\delta_{3,4} ch\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 sh\omega_2 \ell) \\ & \cdot (\delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 - \delta_{1,2} \omega_1 sh\omega_1 \ell_1)\}. \end{aligned} \quad (64)$$

$$\text{We have } C_{2,2}^*(n, m, p) = \Delta_{2,2}^*(n, m, p)/\Delta^*(p);$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_{2,2}^*(n, m, p) = & V_1(n, m, p) k_1 \omega_1 (\delta_{3,4} sh\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell) e^{\frac{v\ell_1}{\kappa_1}} \\ & + V_2(n, m, p) [k_1 \left((\delta_1 \omega_1^2 - \delta_{1,2} \cdot \frac{v}{2\kappa_1}) sh\omega_1 \ell_1 \cdot sh\omega_2 \ell_1 + \delta_2 \omega_1 \right. \\ & \cdot ch\omega_1 \ell_1 \cdot sh\omega_2 \ell_1) + k_2 (\frac{v}{2\kappa_2} sh\omega_2 \ell_1 + \omega_2 ch\omega_2 \ell_1) (\delta_{1,2} sh\omega_1 \ell_1 \\ & - \delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1) e^{\frac{v\ell_1}{2} (\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})}] - V_3(n, m, p) k_1 (\delta_{3,4} sh\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell) \\ & \cdot \left[(\delta_1 \omega_1^2 - \delta_{1,2} \cdot \frac{v}{2\kappa_1}) sh\omega_1 \ell_1 + \delta_2 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right] e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} - V_4(n, m, p) \\ & \cdot (\delta_{3,4} sh\omega_2 \ell + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell) (\delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 - \delta_{1,2} sh\omega_1 \ell_1) e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}}. \end{aligned} \quad (65)$$

We introduce the following symbols:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1;\ell_1} & \equiv \varphi_{1,1;\ell_1}(n, m, p) \equiv \frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1; \\ \varphi_{2,1;\ell_1} & \equiv \frac{v}{2\kappa_2} ch\omega_2 \ell_1 + \omega_2 sh\omega_2 \ell_1; \\ \varphi_{1,2;\ell_1} & \equiv \frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1; \\ \varphi_{2,2;\ell_1} & \equiv \frac{v}{2\kappa_2} sh\omega_2 \ell_1 + \omega_2 ch\omega_2 \ell_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,3;\ell_1} &\equiv \delta_{1,2} sh\omega_1\ell_1 - \delta_1\omega_1 ch\omega_1\ell_1; \\
\varphi_{2,3;\ell_2} &\equiv \delta_{3,4} sh\omega_2\ell_2 + \delta_3\omega_2 ch\omega_2\ell_2;
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,4;\ell} &\equiv \delta_{3,4} ch\omega_2\ell + \delta_3\omega_2 sh\omega_2\ell; \\
\varphi_{1,5;\ell_1} &\equiv (\delta_1\omega_1^2 - \frac{v}{2\kappa_1} \delta_{1,2})sh\omega_1\ell_1 + \delta_2\omega_1 ch\omega_1\ell_1; \\
\varphi_{2,5;\ell_2} &\equiv (\delta_3\omega_2^2 - \frac{v}{2\kappa_2} \delta_{3,4})sh\omega_2\ell_2 + \delta_4\omega_2 ch\omega_2\ell_2;
\end{aligned}$$

from the relation (66), we get

$$\Delta^*(n, m, p) = [k_1(\delta_{1,2}\varphi_{1,2;\ell_1} - \delta_1\omega_1\varphi_{1,1;\ell_1})\varphi_{2,3;\ell_2} + k_2\varphi_{1,3;\ell_1} \cdot \varphi_{2,5;\ell_2}]e^{\frac{v\ell_1}{2}(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})}; \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,1}^*(n, m, p) &= -V_1(k_1\varphi_{1,1;\ell_1} \cdot \varphi_{2,3;\ell_2} + k_2ch\omega_1\ell_1 \cdot \varphi_{2,5;\ell_2})e^{\frac{v\ell_1}{2}(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})} \\
&\quad + V_2k_2\delta_{1,2}\omega_2e^{\frac{v\ell_1}{\kappa_2}} + V_3k_2\delta_{1,2}\varphi_{2,5;\ell_2}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}} + V_4\delta_{1,2}\varphi_{2,3;\ell_2}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}}; \tag{68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{2,1}^*(n, m, p) &= V_1(k_1\varphi_{1,2;\ell_1} \cdot \varphi_{2,3;\ell_2} + k_2sh\omega_1\ell_1 \cdot \varphi_{2,5;\ell_2})e^{\frac{v\ell_1}{2}(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})} \\
&\quad - V_2k_2\delta_1\omega_1\omega_2e^{\frac{v\ell_1}{\kappa_2}} - V_3k_2\delta_1\omega_1\varphi_{2,5;\ell_2}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}} - \\
&\quad V_4\delta_1\omega_1\varphi_{2,3;\ell_2}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_2}}; \tag{69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,2}^*(n, m, p) &= -V_1k_1\omega_1\varphi_{2,4;\ell} \cdot e^{\frac{v\ell_1}{\kappa_1}} - V_2(k_1ch\omega_2\ell_1 \cdot \varphi_{1,5;\ell_1} \\
&\quad + k_2\varphi_{2,1;\ell_1}\varphi_{1,3;\ell_1}) \\
&\quad \cdot e^{\frac{v\ell_1}{2}(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})} - V_3k_1\varphi_{2,4;\ell} \cdot \varphi_{1,5;\ell_1}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} - V_4\varphi_{2,4;\ell}\varphi_{1,3;\ell_1}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}}; \tag{70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{2,2}^*(n, m, p) &= V_1k_1\omega_1\varphi_{2,3;\ell} \cdot e^{\frac{v\ell_1}{\kappa_1}} + V_2(k_1sh\omega_2\ell_1 \cdot \varphi_{1,5;\ell_1} \\
&\quad + k_2\varphi_{2,2;\ell_1}\varphi_{1,3;\ell_1}) \\
&\quad \cdot e^{\frac{v\ell_1}{2}(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2})} - V_3k_1\varphi_{2,3;\ell} \cdot \varphi_{1,5;\ell_1} \cdot e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}} + V_4\varphi_{2,3;\ell}\varphi_{1,3;\ell_1}e^{\frac{v\ell_1}{2\kappa_1}}; \tag{71}
\end{aligned}$$

Using the relations (55), (67), (68), (69), we obtain:

$$\begin{aligned}
T_1^*(z) &= e^{\frac{vz}{2\kappa_1}} \frac{1}{\Delta^*} (\Delta_{1,1}^* sh\omega_1 z + \Delta_{2,1}^* ch\omega_1 z) \\
&\quad - \frac{1}{2\omega_1} \left\{ \int_0^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} - \omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_z^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1} + \omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi \right\}. \tag{72}
\end{aligned}$$

Using the relations (56), (67), (70) and (71), we obtain:

$$\begin{aligned}
T_2^*(z) &= e^{\frac{vz}{2\kappa_2}} \frac{1}{\Delta^*} (\Delta_{1,2}^* sh\omega_2 z + \Delta_{2,2}^* ch\omega_2 z) \\
&\quad - \frac{1}{2\omega_2} \left\{ \int_{\ell_1}^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} - \omega_2\right)(z-\xi)} F_2^*(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_z^\ell e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2} + \omega_2\right)(z-\xi)} F_2^*(\xi) d\xi \right\}. \tag{73}
\end{aligned}$$

The eighth stage: we look for the zeros of function $\Delta^*(n, m, p)$ we write the equation $\Delta^*(n, m, p) = 0$ in the form:

$$\begin{aligned}
& \left[\delta_{1,2} \left(\frac{v}{2\kappa_1} sh\omega_1 \ell_1 + \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right) - \delta_1 \omega_1 \left(\frac{v}{2\kappa_1} ch\omega_1 \ell_1 + \omega_1 sh\omega_1 \ell_1 \right) \right] \\
& \cdot \left[\delta_{3,4} sh\omega_2 \ell_2 + \delta_3 \omega_2 ch\omega_2 \ell_2 \right] - k \cdot \left[\delta_{1,2} sh\omega_1 \ell_1 - \delta_1 \omega_1 ch\omega_1 \ell_1 \right] \\
& \cdot \left[\left(\delta_{3,4} \frac{v}{2\kappa_2} - \delta_3 \omega_2^2 \right) sh\omega_2 \ell_2 - \delta_4 \omega_2 ch\omega_2 \ell_2 \right] = 0. \tag{74}
\end{aligned}$$

We introduce the following symbols:

$$d^{(i)} = d^{(i)}(n, m) \equiv \kappa_i \left(\left(\frac{v}{2\kappa_i} \right)^2 + \lambda_{i,n}^2 + \mu_{i,m}^2 \right), i = 1, 2,$$

$$d_{1,2} \equiv |d^{(1)} - d^{(2)}|.$$

Now, we have two cases:

Case 1.

if $d^{(1)} > d^{(2)}$, we choose $p = p(n, m, \eta) \equiv \kappa_1 \left[\gamma_{n,m,\eta}^{(1)2} + d^{(1)}(n, m) \right]; \eta = 1, 2, \dots$,
where

$\pm \gamma_{n,m,\eta}^{(1)}$ are the roots of the equation with respect to $\gamma^{(1)} = \gamma^{(1)}(n, m)$ as:

$$\begin{aligned}
& \left[\delta_{1,2} \left(\frac{v}{2\kappa_1} \sin \gamma^{(1)} \ell_1 + \gamma^{(1)} \cos \gamma^{(1)} \ell_1 \right) - \delta_1 \gamma^{(1)} \left(\frac{v}{2\kappa_1} \sin \gamma^{(1)} \ell_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \gamma^{(1)} \cos \gamma^{(1)} \ell_1 \right) \right] \\
& \cdot \left[\delta_{3,4} \sin \gamma^{(2)} \ell_2 + \delta_3 \gamma^{(2)} \cos \gamma^{(1)} \ell_2 \right] - k \left(\delta_{1,2} \sin \gamma^{(1)} \ell_1 - \right. \\
& \left. \delta_1 \gamma^{(1)} \cos \gamma^{(1)} \ell_1 \right) \\
& \cdot \left[\left(\delta_{3,4} \frac{v}{2\kappa_2} + \delta_3 \gamma^{(2)2} \right) \sin \gamma^{(2)} \ell_2 - \delta_4 \gamma^{(2)} \cos \gamma^{(1)} \ell_2 \right] = 0, \tag{75}
\end{aligned}$$

where

$$\gamma^{(2)} \equiv \sqrt{\kappa \gamma^{(1)2} + \frac{d_{1,2}}{\kappa_2}}, \quad \kappa \equiv \frac{\kappa_1}{\kappa_2}.$$

Case 2.

if $d^{(2)} > d^{(1)}$, we choose $p = p(n, m, \eta) \equiv \kappa_2 \left[\gamma_{n,m,\eta}^{(2)2} + d^{(2)}(n, m) \right]$; $\eta = 1, 2 \dots$,

where $\pm \gamma_{n,m,\eta}^{(2)}$ are the roots of the equation (75) with respect to $\gamma^{(2)} = \gamma^{(2)}(n, m)$ as:

where

$$\gamma^{(1)} \equiv \sqrt{\frac{1}{\kappa} \gamma^{(2)2} + d_{1,2} / \kappa_1}.$$

So, we proved that the roots of the equation have only real, simple and an infinite numbers is given by [11]

The ninth stage: we apply the inverse Laplace transform with respect to t , and using the properties of the Laplace transform as:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^z e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)} \frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi \right\};$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qx}}{q}; q = \sqrt{\frac{p}{\kappa}}, x > 0 \right\} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2 / (4\kappa t)}$$

Using a last relation, we find that

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa_1}}(z-\xi)}}{\sqrt{p/\kappa_1}}; z - \xi > 0 \right\} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi t}} e^{-(z-\xi)^2 / (4\kappa_1 t)}. \quad (76)$$

We use the property of Laplace transform known as follows:

$$L\{v(t)\} = \bar{v}(p) \Rightarrow L\{e^{-at}v(t); a - const\} = \bar{v}(p + a); \quad (77)$$

from the relations (76) and (77), we obtain:

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{\omega_1}; z - \xi > 0 \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{\frac{1}{\kappa_1}(p+d^{(1)})(z-\xi)}}}{\sqrt{\frac{1}{\kappa_1}(p+d^{(1)})}} \right\} =$$

$$e^{-d^{(1)}t} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\pi t}} e^{-(z-\xi)^2 / (4\kappa_1 t)}, \quad (78)$$

and

$$F_1^*(\xi) = -\frac{1}{\kappa_1} E_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m) - \frac{1}{\kappa_1} \bar{F}_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m, p). \quad (79)$$

Using relations (78) and (79), we find that

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^z e^{v/2\kappa_1(z-\xi)} \frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{\omega_1} F_1^*(\xi) d\xi \right\} = \frac{1}{2} \int_0^z e^{v/2\kappa_1(z-\xi)} \left(-\frac{1}{\kappa_1} E_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m) \right.$$

$$\cdot \left(L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{\omega_1} \right\} \right) d\xi +$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^z e^{v/2\kappa_1(z-\xi)} \left(-\frac{1}{\kappa_1} \right) \left(L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{\omega_1} \bar{F}_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m, p) \right\} \right) d\xi. \quad (80)$$

We use the convolution property of Laplace transforms, we find:

$$L\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\} = L\{\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\} = L\{f_1(t)\} \cdot L\{f_2(t)\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\omega_1(z-\xi)}}{\omega_1} \frac{1}{\kappa_1} \bar{F}_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m, p)\right\} = \int_0^t \frac{e^{-d^{(1)}(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\kappa_1(t-\tau)}} e^{-(z-\xi)^2 / (4\kappa_1 t)} F_{1,x,y}^{0,0}(\xi; \tau, n, m) d\tau. \quad (81)$$

Using the relations (80) and (81), we obtain:

$$\begin{aligned} & L^{-1}\left\{\frac{1}{2\omega_1} \int_0^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1}-\omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi + \frac{1}{2\omega_1} \int_z^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1}+\omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi\right\} \\ &= \frac{e^{-d^{(1)}t}}{\sqrt{4\pi\kappa_1 t}} \int_0^z e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)-\left(\frac{1}{4\kappa_1 t}\right)(z-\xi)^2} E_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m) d\xi + \int_0^z \int_0^t \frac{e^{-d^{(1)}(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\kappa_1(t-\tau)}} \\ & \quad \cdot e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)-\left(1/(4\kappa_1(t-\tau))\right)(z-\xi)^2} F_{1,x,y}^{0,0}(\xi; \tau, n, m) d\tau d\xi + \frac{e^{-d^{(1)}(t)}}{\sqrt{4\pi\kappa_1 t}} \\ & \quad \cdot \int_z^{\ell_1} e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)-\left(1/(4\kappa_1 t)\right)(z-\xi)^2} E_{1,x,y}^{0,0}(\xi; n, m) d\xi + \int_z^{\ell_1} \int_0^t \frac{e^{-d^{(1)}(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\kappa_1(t-\tau)}} \\ & \quad \cdot e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)-\left(1/(4\kappa_1(t-\tau))\right)(z-\xi)^2} F_{1,x,y}^{0,0}(\xi; \tau, n, m) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

We introduce the following function:

$$G^{(1)}(z, \xi; t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa_1 t}} e^{\frac{v}{2\kappa_1}(z-\xi)} e^{-(z-\xi)^2 / (4\kappa_1 t)};$$

using a last function, we get:

$$\begin{aligned} & L^{-1}\left\{\frac{1}{2\omega_1} \int_0^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1}-\omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi + \frac{1}{2\omega_1} \int_z^{\ell_1} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_1}+\omega_1\right)(z-\xi)} F_1^*(\xi) d\xi\right\} \\ &= e^{-d^{(1)}t} \int_0^{\ell_1} G^{(1)}(z, \zeta; t) E_{1,x,y}^{0,0}(\zeta; n, m) d\zeta \\ &+ \int_0^{\ell_1} \int_0^t e^{-d^{(1)}(t-\tau)} G^{(1)}(z, \zeta; t-\tau) \\ & \quad \cdot F_{1,x,y}^{0,0}(\zeta; \tau; n, m) d\tau d\zeta; \end{aligned} \quad (82)$$

where

$$d^{(1)} = d^{(1)}(n, m).$$

$$\begin{aligned} & L^{-1}\left\{\frac{1}{2\omega_2} \int_{\ell_1}^z e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2}-\omega_2\right)(z-\xi)} F_2^*(\xi) d\xi + \int_z^{\ell} e^{\left(\frac{v}{2\kappa_2}+\omega_2\right)(z-\xi)} F_2^*(\xi) d\xi\right\} \\ &= e^{-d^{(2)}t} \int_{\ell_1}^{\ell} G^{(2)}(z, \xi; t) E_{2,x,y}^{0,0}(\xi; n, m) d\xi + \int_{\ell_1}^{\ell} \int_0^t e^{-d^{(2)}(t-\tau)} G^{(2)}(z, \xi; t-\tau) \\ & \quad F_{2,x,y}^{0,0}(\xi; \tau; n, m) d\tau d\xi; \end{aligned}$$

where

$$d^{(2)} = d^{(2)}(n, m),$$

$$G^{(2)}(z, \xi; t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa_2 t}} e^{\frac{v}{2\kappa_2}(z-\xi)} \cdot e^{-(z-\xi)^2 / (4\kappa_2 t)}; \quad (83)$$

from the relations (82), (83) and using Cauchy's theory of residues, we obtain:

$$\begin{aligned} T_{1,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) &= e^{\frac{vz}{(2x_1)}} \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\frac{d}{dp} \Delta^*(n, m; p)} \cdot (\Delta_{1,1}^*(n, m; p) \operatorname{sh} \omega_1(n, m; p) z \right. \\ &+ \Delta_{2,1}^* \operatorname{ch} \omega_1 z) \Big] \Big|_{p=p(n, m; \eta)} \cdot e^{-p(n, m; \eta)t} - e^{-d^{(1)}t} \int_0^{\ell_1} G^{(1)}(z, \zeta; t) E_{1,x,y}^{0,0}(\zeta; n, m) d\zeta \\ &- \int_0^{\ell_1} \int_0^t e^{-d^{(1)}(t-\tau)} G^{(1)}(z, \zeta; t-\tau) F_{1,x,y}^{0,0}(\zeta, \tau; n, m) d\tau d\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) &= e^{\frac{vz}{(2x_2)}} \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\frac{d}{dp} \Delta^*(n, m; p)} \cdot (\Delta_{1,2}^*(n, m; p) \operatorname{sh} \omega_2(n, m; p) z \right. \\ &+ \Delta_{2,2}^* \operatorname{ch} \omega_2 z) \Big] \Big|_{p=p(n, m; \eta)} \cdot e^{-p(n, m; \eta)t} - e^{-d^{(2)}t} \int_{\ell_1}^{\ell} G^{(2)}(z, \zeta; t) E_{2,x,y}^{0,0}(\zeta; n, m) d\zeta \\ &- \int_{\ell_1}^{\ell} \int_0^t e^{-d^{(2)}(t-\tau)} G^{(2)}(z, \zeta; t-\tau) F_{2,x,y}^{0,0}(\zeta, \tau; n, m) d\tau d\zeta. \end{aligned} \quad (84)$$

The tenth stage: we apply the inverse Fourier transformation with respect to x and y respectively.

From the relations (34), (28), (12), we obtain:

$$\begin{aligned} T_{i,x}^{0,0}(y, z, t; n) &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \psi_{i,m}(y); i = 1, 2. \quad (85) \\ T_{i,x}^0(y, z, t; n) &= G_{i,x}^0(y, z, t; n) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \psi_{i,m}(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_i(x, y, z, t) &= f_i(x, y, z, t) + T_i^0(x, y, z, t) \\ &= f_i(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{i,x}^0(y, z, t; n) \varphi_{i,n}(x) \\ &= f_i(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{i,x}^0(y, z, t; n) \varphi_{i,n}(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{i,x,y}^{0,0}(z, t; n, m) \psi_{i,m}(y) \varphi_{i,n}(x). \end{aligned} \quad (86)$$

Finally, from the relations (84), (86), we obtain a solution to the boundary problem (1)-(7) in the form:

$$T_1(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1,x}^0(y, z, t; n) \varphi_{1,n}(x) + e^{vz/(2x_1)}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\frac{2}{d} \Delta^* \cdot (\Delta_{1,1}^* \text{sh} \omega_1 z + \Delta_{2,1}^* \text{ch} \omega_1 z) \right] \Bigg|_{p=p(n,m;\eta)} e^{-p(n,m;\eta)t} \psi_{1,m}(y) \varphi_{1,n}(x) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-d^{(1)}(n,m)t} \left(\int_0^t G^{(1)}(z, \zeta; t) E_{1,x,y}^{0,0}(\zeta; n, m) d\zeta \right) \psi_{1,m}(y) \varphi_{1,n}(x) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^{\ell_1} \int_0^t e^{-d^{(1)}(n,m)(t-\tau)} G^{(1)}(z, \zeta; t-\tau) F_{1,x,y}^{0,0}(\zeta, \tau; n, m) d\tau d\zeta \right) \psi_{1,m}(y) \varphi_{1,n}(x), \\
& T_2(x, y, z, t) = f_2(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2,x}^0(y, z, t; n), \varphi_{2,n}(x) + e^{vz/(2x_2)} \\
& \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\frac{2}{d} \Delta^* \cdot (\Delta_{1,2}^* \text{sh} \omega_2 z + \Delta_{2,2}^* \text{ch} \omega_2 z) \right] \Bigg|_{p=p(n,m;\eta)} e^{-p(n,m;\eta)t} \psi_{2,m}(y) \varphi_{2,n}(x) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[e^{-d^{(2)}(n,m)t} \int_{\ell_1}^{\ell} G^{(2)}(z, \zeta; t) E_{2,x,y}^{0,0}(\zeta; n, m) d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell} \int_0^t e^{-d^{(2)}(n,m)(t-\tau)} \right. \\
& \cdot G^{(2)}(z, \zeta; t-\tau) F_{2,x,y}^{0,0}(\zeta, \tau; n, m) d\tau d\zeta \left. \right] \psi_{2,m}(y) \varphi_{2,n}(x)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
f_i(x, y, z, t) &\equiv \frac{1}{\alpha^{(i)}} [(\alpha_3^{(i)} + a \cdot \alpha_4^{(i)} - \alpha_4^{(i)} x) f_{0,i}(y, z, t) + (\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} x) f_{a,i}(y, z, t)], \\
G_{i,x}^0(y, z, t; n) &\equiv \frac{1}{\beta^{(i)}} \left[(\beta_3^{(i)} + b \cdot \beta_4^{(i)} - \beta_4^{(i)} y) \left(-\frac{1}{a_n} \int_0^a G_{0,i}^0(x_1, z, t) \varphi_{i,n}(x_1) dx_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + (\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} y) \left(\frac{1}{a_n} \int_0^a G_{b,i}^0(x_1, z, t) \varphi_{i,n}(x_1) dx_1 \right) \right],
\end{aligned}$$

where $G_{0,i}^0$; $G_{b,i}^0$, can be obtained from the equation (15).

4. Conclusion

The present study developed a model to predict temperature distribution in moving composite bodies which consist of two rectangular with different physical parameters, using two sequences of integral transformation forms, the Cauchy's residue theory was adopted in deducing the solutions. The obtained solution gives a complete description of the thermal field in moving composite bodies and allows the heat exchanged between composite rectangular and the surrounding medium to be established. The exact closed form solution is of the form of an infinite series. The method of analysis can be applied to composites of any number of composite bodies, used due to the availability of necessary thermo physical and cure kinetics data. As well as this problem has numerous engineering applications, such as, the administration motion of bodies which consists of two rectangular or more. Also, internal combustion engines, as well as in a factory for the production of military, are all others practical examples.

REFERENCES

1. Carslaw H.S. and Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids, 2nd edition, Oxford University Press, London, England, UK, (1959).

2. O' zisik M.N. Heat Conduction, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York (1998)
3. Lotarev V.Y. Temperature field of finite continuous moving cylinder, J. New of Tula State University, V. 5, N. 2, (1999), 82-86.
4. Kuznetsova Y.A. Temperature field of finite hollow radial and inhomogeneous moving cylinder, J. New of Tula State University, Series of differential equations and applied problems, N. 1, (2005), 160-164.
5. Lu X., Tervola P., Viljanen M. Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006) 341–348.
6. Beck J.V., Wright N.T., Haji-Sheikh A., Cole K.D., Amos D.E. Conduction in rectangular plates with boundary temperatures specified, International Journal of Heat and Mass Transfer V. 51 (2008) 4676–4690.
7. Shahout A.M., Gasimov G.R. and Rzayev E.A. Solution problem of heat conduction in the circular hollow cylinder using the program Maple11, The Second Conference on Mathematical Sciences, Zarqa Private University, Jordan, (October 22-23, 2008), 63-73
8. Kidawa-Kukla J. Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source, International Journal of Heat and Mass Transfer, V.51 (2008) 865–872.
9. Kholodovskii S.Y. Solving Boundary Value Problems in Cylinders with Multilayer Film inclusion, J. Scientific Notes of Zabaikalskii State University, N.3, (2012), 145-151.
10. Gasimov G.R., Rzayev E.A. and Aliev A.M. Investigation of a solution problem of heat conduction in the moving bounded hollow cylinder, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku State University, V.2, N.1, (2013), 28-32.
11. Gasimov G.R., Abusutash Z.A. Heat Conduction Equation in Physically Inhomogeneous Moving Composite Solids, International Journal of Differential Equations and Applications, AP, LTD, V.14, N.3, (2015), 252-270
12. Gasimov G.R., Abusutash Z.A. Solution of heat conduction problem with discontinuous boundary conditions in nonhomogeneous moving cylinder using Maple, International Journal of Pure and Applied Mathematics, AP, LTD, V.106, No.4, (2016), 1127-1150.

MÜXTƏLİF FİZİKİ PARAMETRLƏRƏ MALİK İKİ PARALELEPİPEDDƏN İBARƏT HƏRƏKƏTDƏ OLAN CİSİMDƏ TEMPERATUR PAYLANMASI

Q.R.QASIMOV, Z.A.ƏBUSUTAŞ

XÜLASƏ

Məqalədə iki paralelepipeddən ibarət z oxu istiqamətində hərəkətdə olan fiziki mürəkkəb cisimdə istilikkeçirmə məsələsi araşdırılır. Ardıcıl inteqral çevirmələri – x və y -ə nəzərən Furiye, t -yə nəzərən Laplas çevirməsi – üsulundan və Koşinin çıxıqlar nəzəriyyəsi istifadə edilərək, qoyulmuş məsələnin həllinin analitik ifadəsi qurulur.

Açar sözlər: istilikkeçirmə məsələsi, inteqral çevirmələrin ümumi nəzəriyyəsi, ardıcıl inteqral çevirmələri, çıxıqlar nəzəriyyəsi.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ДВИЖУЩЕМСЯ СОСТАВНОМ ТЕЛЕ,
СОСТОЯЩЕМ ИЗ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ С РАЗНЫМИ
ФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Г.Р.ГАСЫМОВ, З.А.АБУСУТАШ

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается решение задачи теплопроводности на движущемся по направлению оси z составного тела, состоящем из двух параллелепипедов с разными физическими параметрами. Пользуясь методом последовательных интегральных преобразований - преобразованием Фурье по x и по y , преобразованием Лапласа по t , а также теорией вычетов Коши, построено аналитическое выражение решения поставленной задачи.

Ключевые слова: задача теплопроводности, общая теория интегральных преобразований, последовательные интегральные преобразований, теория вычетов.

KƏSR TƏRTİBLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV

Bakı Dövlət Universiteti

Saracli@mail.ru

Burada α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həllində Riman-Liuvill mənada kəsr tərtibdən inteqrallamadan istifadə olunur. Məsələni həll edərkən, məsələ ikinci növ, requlyar nüvəli Volterra-Fredholm həddli inteqral tənliyə gətirilir. Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyi həll etmək üçün təqribi hesablama üsulu olan ardıcıl yerinə yazma üsulundan istifadə olunur. Bu üsulu bütün hədlərdə aparsaq məsələ mürəkkəbləşər. Ona görə iterasiya üsulunu ancaq Volterra həddində aparmaqla bu həddi kifayət qədər kiçiltmək mümkündür. Və sonda bu həddi xəta kimi qəbul edərək atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur. Alınan həll təqribi həll kimi qəbul olunur.

Açar sözlər: Üç nöqtəli məsələ, Sərhəd məsələsi, İnteqro-diferensial tənlik, Kəsr tərtibli tənlik

Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinin araşdırılması çox zaman bu məsələləri ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə aparılır [1], [2]. Bəzən bu cür məsələlər Y.Məmmədovun araşdırdığı ikinci növ Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilərkən araşdırılır [3], [4]. Biz burada törəməsi kəsr tərtibdən olan adi inteqro-diferensial tənlik üçün qoyulmuş üç-nöqtəli sərhəd məsələsini özündə həm Volterra, həm də Fredholm hədləri tutan ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə kifayətlənmişik.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılırsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nüvəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənliyə baxılır. Bu tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə tənlik hər iki tərəfdən Riman-Liuvill mənada inteqrallanır. Bu məsələnin həlli zamanı Dirakin-Delta funksiyasından istifadə olunur.

$$D_{x_0}^{\alpha} y(x) + ay(x) + \int_{x_0}^x K(x, t)y(t)dt = f(x), \quad x \in (x_0, x_2), \quad (1)$$

$$y(x_0) + a_1 y(x_1) + b_1 y(x_2) = \quad (2)$$

c_1

Burada $\alpha \in (0,1)$, a_1, b_1, c_1 verilmiş sabitlərdir, $0 < x_0 < x_1 < x_2$, $K(x,t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır, $y(x)$ axtarılan funksiyadır. Verilmiş (1) tənliyinin hər iki tərəfindən α tərtib inteqral alaq:

$$I_{x_0}^\alpha D_{x_0}^\alpha y(x) + a I_{x_0}^\alpha y(x) + I_{x_0}^\alpha \int_{x_0}^x K(x,t)y(t)dt = I_{x_0}^\alpha f(x),$$

$$\begin{aligned} y(x) + c \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \\ + a \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \int_{x_0}^\xi K(\xi,t)y(t)dt \\ = \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

və ya

$$\begin{aligned} y(x) \\ = \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \\ - \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \int_{x_0}^\xi K(\xi,t)y(t)dt - a \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ - c \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \end{aligned} \quad (3)$$

Aldığımız (3) ifadəsindən istifadə etməklə (2) sərhəd şərtlərində olan qiymətləri hesablayaq.

$$y(x_0) = -c \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_1} y(t)dt \int_t^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi \\ - a \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(t)dt - c \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_2} y(t)dt \int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t) d\xi \\ - a \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(t)dt \\ - c \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}, \end{aligned} \quad (6)$$

(4)-(6) qiymətlərini (2) sərhəd şərtində yerinə yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned}
 & -c \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - ca_1 \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - \\
 & cb_1 \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} = a_1 \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \left[\int_t^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + a \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] - \\
 & a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi + b_1 \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \left[\int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + \right. \\
 & \left. a \frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] - \\
 & b_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{7}$$

Əgər

$$\Delta \equiv \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_1 \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + b_1 \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \neq 0, \tag{8}$$

Onda (7)-dən ixtiyari C sabiti aşağıdakı şəkildə tapılmış olar:

$$\begin{aligned}
 C = -\frac{1}{\Delta} \left\{ a_1 \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \left[\int_t^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + a \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \right. \\
 - a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \\
 + b_1 \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \left[\int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + a \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\
 \left. - b_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \right\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

C üçün aldığımız (9) ifadəsini (3)-də yerinə yazmaqla (1)-(2) sərhəd məsələsini aşağıdakı kimi integral tənliyə gətirmiş oluruq:

$$\begin{aligned}
 y(x) = - \int_{x_0}^x y(t) dt \int_t^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi - a \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(t) dt + \\
 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi + \\
 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \frac{1}{\Delta} \left\{ a_1 \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \left[\int_t^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + a \frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] - \right. \\
 a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi + b_1 \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \left[\int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + \right. \\
 \left. \left. a \frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] - b_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \right\}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Burada müəyyən çevirmələr aparsaq alarıq:

$$\begin{aligned}
y(x) + \int_{x_0}^x y(t) dt & \left[\int_t^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi + a \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\
& - \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \left[\frac{x^{\alpha-1} a_1}{(\alpha-1)! \Delta} \int_t^{x_1} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \right. \\
& \left. + \frac{x^{\alpha-1} a_1}{(\alpha-1)! \Delta} a \frac{(x_1-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\
& - \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \left[\frac{x^{\alpha-1} b_1}{(\alpha-1)! \Delta} \int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \right. \\
& \left. + \frac{x^{\alpha-1} b_1}{(\alpha-1)! \Delta} \frac{(x_2-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\
& = \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \\
& - \frac{x^{\alpha-1} a_1}{(\alpha-1)! \Delta} \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \\
& - \frac{x^{\alpha-1} b_1}{(\alpha-1)! \Delta} \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f(\xi) d\xi \tag{11}
\end{aligned}$$

Beləliklə qoyulmuş kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənlik üçün üçnöqtəli sərhəd məsələsi Volterra və Fredholm hədlili ikinci növ inteqral tənliyə gətirilmiş oldu.

Teorem1: Əgər $\alpha \in (0,1)$, a, a_1, b_1 və c_1 verilmiş sabit ədədlər olmaqla, $00 < x_0 < x_1 < x_2$, $K(x, t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardırsa, onda (1)-(2) sərhəd məsələsi (10) ikinci növ inteqral tənliyə gətirilir.

Qeyd. Alınmış (10) inteqral tənliyində Volterra həddinə nəzərən iterasiyalar aparmaqla bu həddin nüvəsini kifayət qədər kiçiltmək mümkündür. Onda bu həddi xəta kimi qəbul etməklə alınan ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlik həll olunur. Bu cür alınmış həll qoyulmuş məsələnin təqribi həlli kimi qəbul edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Дезин А.А., Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 208 с.
2. Ловитт У.В., Линейные интегральные уравнения ГИТТЛ. М., 1957, 268 с.
3. Мəmmədov Y.C. Тəqribi hesablamə üsulları. Bakı: Maarif, 1986, 264 s.
4. Mehran Fatemi, Nihan Aliyev, Sadaghat Shahmorad, Existence and uniqueness of solution for a fractional order inteqro-differentiation equation with non-local and Scientific research. Applied mathematics, 2011, 2, 1291-1296.

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данном случае рассматривается на трехточечной граничной задаче для простого линейного интегро-дифференциального уравнения дробного порядка. Сама проблема сводится к уравнению второго типа регулярного ядра Вольтерра-Фредгольма.

Изучение таких уравнений представляет собой метод последовательной подстановки. Так что, если использовать этот метод во всех членах, процесс будет сложным. Следовательно, поскольку ядро этого члена можно сделать сколь угодно малым путем выполнения метода последовательной подстановки только на члене Вольтерра, этот член отбрасывается как погрешность, и строится последовательность разрешения для второго типа полученного уравнения Фредгольма.

Ключевые слова: Трехточечная задача, Краевая задача, Интегро-дифференциальное уравнение, Уравнение дробного порядка.

THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.Ə.OSMANOV

SUMMARY

In the present case, the problem of a three-point boundary for a simple, linear integro-differential equation with a fraction is considered. This problem itself is brought to the equation of the second type of regular nucleus by both Voltaire and Fredholm.

The study of such equations is a method of sequential substitution. Thus, if this method is carried out to the fullest term, the process becomes more complicated. Therefore, since the nucleus of this equation can be made as small as desired by performing the sequential substitution method only at the Volterra term, this equation is discarded as an error and a resolution sequence is constructed for the second type of Fredholm equation obtained.

Key words: Three-point problem, Boundary value problem, Integro-differential equation, Fractional-order differential equation, global boundary conditions.

İNFORMATİKA

UDK 622.276.1/4.001.57

QAZKONDENSAT LAYININ NİSBİ FAZA KEÇİRİCİLİKLƏRİ
FUNKSIYALARININ İDENTİFİKASİYALI TƏYİNİ

M.S.XƏLİLOV

*Bakı Dövlət Universiteti**khalilov_mubariz@mail.ru*

Layın istismar göstəricilərinin faktiki məlumatlarının dəyişməsinə görə qazkondensat-su sisteminin süzülməsinin nisbi faza keçiricilikləri funksiyalarının təyini üçün üçfazlı hidrodinamik modelin parametrik identifikasiyası üsulu işlənmişdir.

Açar sözlər: su, qazkondensat, identifikasiya, faza, lay.

Lay fluidlərinin çoxfazlı axını prosesinin ən vacib xarakteristikalarından biri nisbi faza keçiricilikləridir və onların çox hallarda identifikasiyası neft və qaz yataqlarının işlənilməsinin texnoloji göstəricilərinin təyininin hidrodinamik hesablamalarının proqnozlarının mükəmməliyinin artırılması üçün faydalıdır.

Hidrodinamik və geofizik tədqiqatın verilənlərə görə onların təyininin müxtəlif üsulları məlumdur. Son zamanlar nisbi faza keçiricilikləri (NFK) funksiyalarının təyini üçün neft-qaz yataqlarının istismarı prosesində toplanan hidrodinamik informasiyalardan istifadəyə əsaslanan üsullar tətbiq edilir.

Qazkondensat-su qarışığının süzülməsinin hidrodinamik modelinə daxil olan NFK funksiyalarının təyini məsələsi müxtəlif zaman anlarında təzyiğin ölçülən (və ya işlənmə tarixindən məlum olan) və müvafiq hidrodinamik məsələnin həllindən hesablanan qiymətləri arasındakı fərqi görə təyin edilən J funksionalının minimumunun variasiya məsələsi kimi tədqiq edilir.

Qəbul edilir ki, qazkondensat layı suvurma rejimində istismar olunur və $Q(t)$ hasilatı ilə işləyən r_c radiuslu mərkəzi quyusu məhsuldar layın h hündürlüyünü açmışdır. Laya sərhəddən suvurma quyusu ilə $p_\kappa(t)$ təzyiqi ilə su vurulur. Bu halda qazkondensat-su qarışığının mərkəzi quyuya radial oxa simmetrik müstəvi paralel axını aşağıdakı qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi ilə ifadə olunur[1,5]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rA \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rC \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rE \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$p(r,t)|_{t=0} = p_0, \quad s_k(r,t)|_{t=0} = 0, \quad s_{c\epsilon}(r,t)|_{t=0} = s_{c\epsilon}, \quad (4)$$

$$2\pi rh(A+C) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = Q(t), \quad (5)$$

$$p(R_k, t) = p_\kappa(t), \quad s_\kappa(R_k, t) = 0, \quad s_\epsilon(R_k, t) = 1, \quad (6)$$

Burada

$$A = \frac{kf_z(s_z)p\beta[1-c(p)\bar{\gamma}(p)]}{\mu_z(p)z(p)p_{at}} + \frac{kf_k(s_z, s_\epsilon)S_k(p)}{\mu_k(p)a_k(p)};$$

$$B = \frac{mS_k(p)}{a_k(p)}s_\kappa + (1-s_\kappa - s_\epsilon) \frac{mp\beta[1-c(p)\bar{\gamma}(p)]}{z(p)p_{at}};$$

$$C = \frac{kf_z(s_z)pc(p)\beta}{\mu_z(p)z(p)p_{at}} + \frac{kf_k(s_z, s_\epsilon)}{\mu_k(p)a_k(p)};$$

$$D = \frac{ms_\kappa}{a_k(p)} + (1-s_\kappa - s_\epsilon) \frac{mp\beta c(p)}{z(p)p_{at}};$$

$$E = \frac{kf_\epsilon(s_\epsilon)}{\mu_\epsilon(p)a_\epsilon(p)}; \quad G = \frac{ms_\epsilon}{a_\epsilon(p)}, \quad B = \frac{mp}{z(p)};$$

$f_k(s_z, s_\epsilon)$ - kondensata görə nisbi faza keçiriciliyi; $f_z(s_z)$ - qaza görə nisbi faza keçiriciliyi; $f_\epsilon(s_\epsilon)$ - suya görə nisbi faza keçiriciliyi; $\mu_\epsilon(p)$ - suyun özlülüyü; $a_\epsilon(p)$ - suyun həcmi əmsalı; s_ϵ - su ilə doyma; r_c və R_k - uyğun olaraq quyunun radiusu, dairəvi layın radiusu və ya quyunun təsir zonasının radiusudur. Digər parametrlərin adları əvvəlki fəsillərdən məlumdur.

(1)-(6) sisteminə daxil olan NFK funksiyalarının identifikasiyası üçün onların ifadələrinə daxil olan

$$f_z(s_z) = \alpha_1 s_z^{\alpha_2}, \quad f_k(s_z, s_\epsilon) = \alpha_3 ((1-s_{c\epsilon}) - (s_z + s_\epsilon))^{\alpha_4}, \quad f_\epsilon(s_\epsilon) = \alpha_5 s_\epsilon^{\alpha_6}, \quad (7)$$

naməlum α_i ($i=1,6$) parametrlərin elə qiymətlərinin təyini tələb olunur ki, (1)

- (6) məsələsinin həlli

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = \int_0^{\bar{T}} [p(r_c, t) - p_c(t)]^2 dt + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i^2 \right), \quad (8)$$

funksiyasının qiymətinə minimum versin. Burada $p(r_c, t)$ - quyudibi təzyiqin düz məsələnin həllinə əsasən hesablanan qiyməti; $p_c(t)$ - quyudibi təzyiqin mədən məlumatlarına əsasən məlum olan faktiki qiyməti; ε -requlyarizasiya parametridir.

Naməlum $\Psi_1(r, t), \Psi_2(r, t), \Psi_3(r, t)$ funksiyaları daxil edilməklə baxılan (1)-(8) minimallaşdırılma məsələsi aşağıdakı ümumi funksionalın naməlum parametrlərə görə minimumunun tapılması məsələsinə gətirilir:

$$\begin{aligned} J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = & \int_0^{\bar{T}} [p(r_c, t) - p_c(t)]^2 dt + \iint_{D_1} \Psi_1(r, t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rA \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial B}{\partial t} \right] drdt + \\ & + \iint_{D_1} \Psi_2(r, t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rC \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial D}{\partial t} \right] drdt + \\ & \iint_{D_1} \Psi_3(r, t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rE \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\partial G}{\partial t} \right] drdt + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i^2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

(9) funksionalının minimumunun tapılması (identifikasiya məsələsinin həlli) qradient üsulundan [4-6 və s.] istifadə olunmaqla yerinə yetirilir. $\Psi_1(r, t)$, $\Psi_2(r, t)$ və $\Psi_3(r, t)$ funksiyalarının təyini üçün (1)-(6) düz məsələsinə qoşma olan məsələ aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\begin{aligned} B_p \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_p \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + G_p \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) r A_p + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_2}{r} \right) r C_p + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) r E_p \right] \frac{\partial p}{\partial r} - \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) r A \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_2}{r} \right) r C \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) r E \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_{s_k} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_{s_k} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) r A_{s_k} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_2}{r} \right) r C_{s_k} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (11)$$

$$B_{s_e} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_{s_e} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + G_{s_e} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) r A_{s_e} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_2}{r} \right) r C_{s_e} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) r E_{s_e} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\Psi_1(r, \bar{T}) = \Psi_2(r, \bar{T}) = \Psi_3(r, \bar{T}) = 0, \quad (13)$$

$$\left[\left((\Psi_1 A_p + \Psi_2 C_p + \Psi_3 E_p) - (\Psi_1 A + \Psi_2 C + \Psi_3 E)(A + C)^{-1}(A_p + C_p) \right) \frac{\partial p}{\partial r} - \right.$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_1}{r}\right)rA + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_2}{r}\right)rC + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_3}{r}\right)rE\right) - (p(r_c, t) - p_c(t)) \Big|_{r=r_c} = 0, \quad (14)$$

$$\left[\left((\Psi_1 A_{s_k} + \Psi_2 C_{s_k}) - (\Psi_1 A + \Psi_2 C + \Psi_3 E)(A + C)^{-1}(A_{s_k} + C_{s_k})\right) \frac{\partial p}{\partial r}\right]_{r=r_c} = 0, \quad (15)$$

$$\left[\left((\Psi_1 A_{s_6} + \Psi_2 C_{s_6}) - (\Psi_1 A + \Psi_2 C + \Psi_3 E)(A + C)^{-1}(A_{s_6} + C_{s_6})\right) \frac{\partial p}{\partial r}\right]_{r=r_c} = 0, \quad (16)$$

$$\Psi_1(R_k, \bar{T}) = \Psi_2(R_k, \bar{T}) = \Psi_3(R_k, \bar{T}) = 0. \quad (17)$$

(10)-(17) məsələsində $A_p, B_p, C_p, D_p, E_p, G_p, A_{s_k}, B_{s_k}, C_{s_k}, D_{s_k}, E_{s_k}, G_{s_k}, A_{s_6}, B_{s_6}, C_{s_6}, D_{s_6}, E_{s_6}, G_{s_6}$ - A, B, C, D, E və G funksiyalarının p -yə, s_k -ə və s_6 -ya görə törəmələrdir.

Beləliklə, $\Psi_1(r, t)$, $\Psi_2(r, t)$ və $\Psi_3(r, t)$ funksiyaları təyin olunmaqla $J(\alpha)$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$) funksiyası üçün artım aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$\begin{aligned} \Delta J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = & \sum_{i=1}^4 \Delta \alpha_i \left\{ \iint_{D_1} \left[\Psi_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Psi_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r C_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \right] \right\} + \\ & + \int_0^{\bar{T}} \left((\Psi_1 A + \Psi_2 C + \Psi_3 E)(A + C)^{-1} (A_{\alpha_i} + C_{\alpha_i}) \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c} dr dt + 2\varepsilon \alpha_i + \varepsilon \Delta \alpha_i \Big\} + \\ & + \sum_{i=5}^6 \Delta \alpha_i \left\{ \iint_{D_1} \Psi_3 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r E_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] dr dt + 2\varepsilon \alpha_i + \varepsilon \Delta \alpha_i \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Buradan, J funksiyasının qradienti üçün alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = & \iint_{D_1} \left\{ \Psi_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Psi_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r C_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \right] \right\} dr dt + \\ & + \int_0^{\bar{T}} \left((\Psi_1 A + \Psi_2 C + \Psi_3 E)(A + C)^{-1} (A_{\alpha_i} + C_{\alpha_i}) \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c} dr dt + 2\varepsilon \alpha_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (19) \\ & \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \iint_{D_1} \Psi_3 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r E_{\alpha_i} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] dr dt + 2\varepsilon \alpha_i, \quad i = 5, 6. \end{aligned}$$

Alınmış qradient ifadəsindən istifadə etməklə nisbi faza keçiriciliklərinin nəzəri ifadələrinə daxil olan axtarılan α_i ($i = \overline{1,6}$) parametrlərinin identifikasiyalı təyini üçün aşağıdakı iterasiya alınır:

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k - \lambda_{ik} \frac{\partial J(\alpha_i^k)}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (20)$$

Burada $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$ törəmələri (19) ifadələrinin köməyi ilə hesablanır. Beləliklə, NFK funksiyalarının təyini üçün tərs məsələnin həll alqoritmi aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$-\alpha_i$ ($i = \overline{1,6}$) parametrlərinin ilkin qiyməti verilir və (1)-(6) düz məsələsi layın $[0, \overline{T}]$ məlum işlənilmə tarixinə əsasən sonlu fərqlər üsulu [3,6 və s.] ilə həll edilir və zamanın müxtəlif addımlarında lay təzyiqi və qaz, su, kondensatla doymanın paylanması hesablamalarla təyin edilir.

- optimizasiya parametrləri (20) iterasiya yolu ilə tapılır.

- parametrlərinin təyininin iterasiya proseduru o vaxta qədər davam edir ki, iki qonşu iterasiyasda funksionalın qiymətləri fərqi verilən dəqiqliyi ödəyir.

NFK funksiyalarının identifikasiya alqoritmi lay modelində aprobeasiya olunmuşdur və aşağıdakı ilkin verilənlərlə xarakterizə olunur[5,6]:

$$a_g = 2,24 + 0,0095p, \quad (m^3 / m^3); \quad \mu_g(p) = 0.236 \text{ mPa} \cdot s;$$

$$k = 0,05 \text{ mkm}^2; \quad s_{c_g} = 0,2; \quad r_c = 0,1 \text{ m}; \quad R_k = 750 \text{ m}; \quad m = 0,2;$$

$$p_c = 36.0 \text{ MPa}; \quad p_0 = 40 \text{ MPa}; \quad p_k = 40 \text{ MPa}; \quad Q(t) = 5 \cdot 10^5 \text{ m}^3 / \text{gün}.$$

Hesablama modelinin realizasiyası zamanı nisbi faza keçiriciliklərinin lay məlumatlarına görə identifikasiyası aparılmış və nəticə olaraq

$$f_z(s_z) = 0.9 \cdot (s_z)^{2.89}, \quad f_k(s_z, s_g) = 0.78 \cdot (0.8 - (s_z + s_g))^{1.7},$$

$$f_g(s_g) = 1.25 s_g^2$$

şəklində təyin edilmişdir.

Beləliklə, mədən məlumatları əsasında subasqı rejimli qazkondensat layının müvafiq olaraq suya, qaza və kondensata görə nisbi faza keçiricilikləri funksiyalarının identifikasiyalı təyini proqnoz hesablamalarının dəqiqliyinin artırılmasını təmin etməklə real şəraitə layın hidrodinamik modelini adaptasiya etməyə imkan verir.

Nəticə

Layın istismar göstəricilərinin faktiki məlumatlarının dəyişməsinə görə qazkondensat-su sisteminin süzülməsinin nisbi faza keçiricilikləri funksiyalarının təyini üçün üçfazlı hidrodinamik modelin parametrik identifikasiyası üsulu işlənmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Feyzullayev Kh.A., Khalilov M.S. Identification of heterogeneous stratum parameters in gas-condensate mixture filtration. IV International Conference “ Problems of cybernetics and informatics” Baku. 12-14 september, 2012. pp. 62-66
2. Абасов М.Т., Стреков А.С., Эфендиев Г.М. Повышение эффективности ограничения водопритоков в нефтяных скважинах. Баку: Nafta-Press, 2009, 256 с.
3. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.
4. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989, 232с.
5. Старковский В.А. Обоснование технологии селективной изоляции притока воды в добывающих скважинах на нефтяных месторождениях композициями на основе щелочных силикатных гелей: Автореферат дис. канд.тех.наук. ОАО “ВНИИнефть”, 2013, 25 с.
6. Фейзуллаев Х.А. Особенности влияния неоднородности коллектора на процесс обработки призабойных зон газоконденсатных скважин “сухим” газом // Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2008, №3, с.43-51
7. Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С., Кулиев Э.А., Магеррамов С.Д. Моделирование газового воздействия на газоконденсатный пласт на завершающей стадии разработки // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. Москва ОАО, ВНИОЭНГ, М., 2018, №8, с.48-52

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОНИЦАЕМЫХ ГАЗОКОНДЕНСАТНЫХ ПЛАСТОВ

М.С.ХАЛИЛОВ

РЕЗЮМЕ

Разработан метод параметрической идентификации трехфазной гидродинамической модели для определения функций относительной фазовой проницаемости фильтрации системы газовой конденсат-вода в связи с изменением фактических характеристик пласта.

Ключевые слова: вода, газовый конденсат, идентификация, фаза, пласт.

IDENTIFICATION OF FUNCTIONS RELATING TO PERMEABLE GAS CONDENSATE FORMATIONS

M.S.KHALILOV

SUMMARY

A method for the parametric identification of a three-phase hydrodynamic model has been developed to determine the functions of the relative phase permeability of filtration of the gas condensate-water system in connection with changes in the actual characteristics of the reservoir.

Keywords: water, gas condensate, identification, phase, formation.

FİZİKA

UOT 621.315.592

AŞQARLANMIŞ n -InSe KRİSTALLARI ƏSASINDA
İNFRAQIRMIZI FOTOQƏBULEDİCİLƏRƏ.Ş.ABDİNOV, R.F.BABAYEVA*,
S.İ.ƏMİROVA, N.Ə.RƏHİMOVA, E.A.RƏSULOĞ*Bakı Dövlət Universiteti,***Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti (UNEC)**abdinov-axmed@yandex.ru, babaeva-rena@yandex.ru*

Təmiz (aşqar daxil edilməmiş) və $N \approx 10^{-5} - 10^{-1}$ at.% miqdarında lantanidlə (holmium və erbiumla) aşqarlanmış n -InSe kristallarında məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsi, mənfi fotokeçiricilik və induksiyanmış aşqar fotokeçiricilik hadisələri tədqiq olunub. Aşqar edilib ki, bu kristallarda həmin hadisələr temperaturun $T \leq 150$ K qiymətlərində müşahidə olunur. Birinci iki hadisənin spektri $1.20 \leq \lambda \leq 1.90$ mkm, üçüncü hadisənin spektri isə $1.90 \leq \lambda \leq 3.60$ mkm diapazonunu əhatə edir. Temperaturun 77 K-dən başlayaraq yüksəlməsi ilə hər üç hadisə zəifləyir. Lantanidlərlə aşqarlanma bu fotoelektrik hadisələrinin xarakteristikalarına təsir göstərmir, yalnız daxil edilən aşqarın miqdarından asılı olaraq həmin xarakteristikaların stabilliyi və təkrarlanma dərəcəsi dəyişir. Bu asılılıq n -InSe kristallarının fəzaca qeyri-bircins olması və həmin qeyri-bircinsliyin daxil edilən aşqarın miqdarından asılı olaraq dəyişməsi ilə bağlıdır. Hər iki qrup (təmiz və aşqarlanmış) n -InSe monokristallarında mənfi fotokeçiricilik və məxsusi fotokeçiriciliyin optik sönməsi hadisələri bu yarımkeçiricinin qadağan olunmuş zonasında iki qrup rekombinasiya mərkəzlərinin, induksiyanmış aşqar fotokeçiricilik hadisəsi isə - dayaz tutma mərkəzlərinin olması ilə bağlıdır. Lantanidlərlə aşqarlanmış n -InSe monokristalları əsasında optik spektrin yaxın və orta infraqırmızı oblastları üçün işləmə mexanizmi yeni prinsiplərə əsaslanan yüksək həssaslığa, stabil və təkrarlanan xarakteristikalara malik işıq qeydediciləri düzəltmək mümkündür.

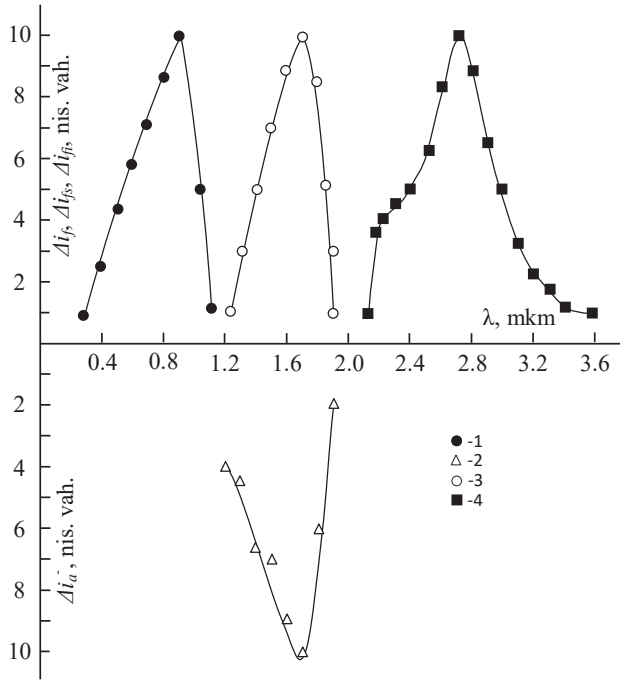
Açar sözlər: optoelektronika, monokristal, fotoqəbuledici, mənfi fotokeçiricilik, makroskopik defekt, rekombinasiya mərkəzləri, tutma mərkəzləri.

Müasir optoelektron cihaz, qurğu və sistemlərinin elmin, texnikanın, istehsalatın və məişətin müxtəlif sahələrində tətbiqi insanların optik spektrin yalnız $0.38 \div 0.78$ mkm dalğa uzunluğu diapazonunda məhdudlaşan görmə və onların ətraf ələmi vizual qavramaq imkanlarının sərhədlərini xeyli, daha doğrusu $0.10 \div 10.00$ mkm diapazonuna qədər genişləndirmişdir [1].

Həmin cihaz, qurğu və sistemlərin ən başlıca elementlərindən biri yarımkeçirici materiallarda baş verən fotoelektrik hadisələri - fotokeçiricilik,

fotovoltaik effektlər, məxsusi fotokeçiriciliyin sönməsi və s. [2] əsasında işləyən müxtəlif tip fotoqəbuledicilərdir. Bu səbəbdən də optik spektrin müxtəlif diapazonlarında ftohəssaslığa malik olan yeni yarımkeçirici materialların alınması, aşkar edilməsi, onların fotoelektrik xassələrinin ətraflı tədqiq olunması daima müxtəlif ixtisaslı tədqiqatçıların - fiziklərin, kimyaçıların, texnoloqların, konstruktorların və cihaz qayıranların diqqət mərkəzindədir. Çoxdan mövcud olan yarımkeçiricilərin də fotoelektrik xassələrinin tədqiqinə maraq gündən-günə artır. Qeyd olunan aspektdə diqqəti cəlb edən və artıq bir neçə illərdən bəri tədqiq olunan məlum yarımkeçirici materiallardan biri də laylı kristal quruluşlu $A^{III}B^{VI}$ yarımkeçirici birləşmələr sinfinə mənsub olan indium monoseleniddir (n-InSe) [3]. Kimyəvi təsirlərə qarşı yüksək dərəcədə davamlı olan, iriölçülü külçələrdən asanlıqla bir neçə laydan ibarət nazik və atomar səviyyədə hamar səthə malik təbəqələri qoparıla bilən bu yarımkeçiricinin monokristallarında indiyədək bir sıra maraqlı fotokeçiricilik hadisələri müşahidə olunmuş, onların əsasında müxtəlif kontakt strukturlarının [4], ifratnazik və elastiki optoelektron cihazlarının [5], daha geniş zolaqlı ftohəssaslığa və böyük ayırdetmə qabiliyyətinə malik olan fototranzistorların [6], yüksək effektivlikli günəş enerjisi çeviricilərinin [7] yaradılmasının mümkünlüyü göstərilmişdir. İfratnazik n-InSe kristalı laylarını yüksək elektrik və mexaniki xassələrinə görə qrafenlə, yarımkeçirici xassələrinə görə isə müasir elektronikada geniş tətbiq tapmış silisiumla müqayisə etmək olar. Otaq temperaturu ətrafındakı temperaturalarda da çox yüksək ftohəssaslığa malik olması, qadağan olunmuş zonasının eninin optimal qiyməti (1.25÷1.35 eV) n-InSe monokristallarını optoelektronika üçün müxtəlif funksional elementlər və günəş enerjisi çeviriciləri düzəltmək baxımından çox perspektivli edir.

Bununla belə, indium monoselenidi monokristallarının fotoelektrik xassələrinin optik spektrin infraqırmızı (İQ) diapazonunda müşahidə olunan və optoelektronika üçün əhəmiyyət kəsb edən xüsusiyyətləri, eləcə də həmin xüsusiyyətlər hesabına bu yarımkeçiricinin malik olduğu praktiki tətbiq imkanları heç də lazımınca öyrənilməmişdir. Təqdim olunan iş n-tip keçiriciliyə malik, aşqarlanmamış və bəzi lantanidlərlə, daha doğrusu $N \approx 10^{-5} \div 10^{-1}$ at.% miqdarında holmium (Ho) və erbiyumla (Er) aşqarlanmış indium monoselenidi monokristallarının fotokeçiriciliyinin yaxın və orta infraqırmızı (İQ) diapazonundakı ($1.00 \leq \lambda \leq 3.00$ mkm diapazonunda) xüsusiyyətlərinin və həmin xüsusiyyətlərə malik olması hesabına bu yarımkeçirici əsasında İQ fotoqəbuledicilərin düzəldilməsi imkanlarının aşkar edilməsinə həsr olunub.

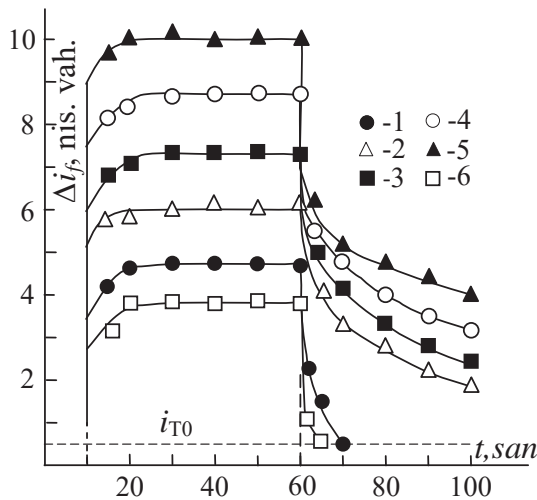


Şək. 1. n-InSe kristallarında məxsusi fotokeçiriciliyin (1-əyrisi), mənfəi fotokeçiriciliyin (2-əyrisi), məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsinin (3-əyrisi), induksiyanmış aşqar fotokeçiriciliyin (4-əyrisi) spektrləri.
 $T=77$ K; $\Phi_m=0.1 \Phi_m^{max}$; $\Phi_a=0.1 \Phi_a^{max}$; $\lambda_m=0.95$ mkm; $\Phi_m^{max} \approx 5 \cdot 10^2$ Lk;

Aparılan təcrübi tədqiqatlar nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, n-InSe monokristallarının fotokeçiriciliyinin spektri nisbətən aşağı temperaturlarda ($T \leq 150$ K olduqda) dalğa uzunluğunun $0.35 \leq \lambda \leq 1.15$ mkm oblastındakı müsbət məxsusi (i_f) və $1.20 \leq \lambda \leq 1.90$ mkm oblastındakı mənfəi aşqar (i_a^-) fotokeçiricilik komponentlərindən ibarət olmaqla, optik spektrin kifayət qədər geniş diapazonunu əhatə edir. Həmin kristalları eyni zamanda həm məxsusi udma oblastından (məxsusi), həm də onlarda mənfəi fotokeçiriciliyin (MFK) müşahidə edilədiyi oblastdan olan fon aşqar işıqla işıqlandırdıqda məxsusu fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsi (3-əyrisi) hadisəsi, daha uzun dalğalı aşqar udma oblastında ($1.90 \leq \lambda \leq 3.60$ mkm) isə induksiyanmış aşqar fotokeçiricilik (4-əyrisi) hadisəsi müşahidə olunur (şəkil 1). Beləliklə də bu yarımkeçiricinin fotokeçiriciliyi optik spektrin bütün görünən ($0.38 \leq \lambda \leq 0.78$ mkm) diapazonu ilə yanaşı, həm də yaxın və orta infraqırmızı diapazonlarını ($0.78 \leq \lambda \leq 3.00$ mkm) da tamamilə əhatə edir.

Ən başlıcası isə bu halda n-InSe monokristalları yüksək intensivliyə malik (parlaq) görünən işıqla işıqlandırılma fonunda yaxın və orta infraqırmızı diapazonlarından olan zəif şüalanmalara da qeyd oluna biləcək səviyyədə reaksiya verir. Məhz belə bir imkanın müasir optoelektronika üçün böyük əhəmiyyət kəsb etməsi ilə bağlı olaraq, biz təcrübədə n-InSe monokristalla-

rında mənfi fotokeçiriciliyin, məxsusi fotokeçiriciliyin optik sönməsinin, induksiyanlanmış aşqar fotokeçiriciliyin əsas parametrlərinin və xarakteristikalarının temperaturdan, daxil edilən aşqarın miqdarından və kimyəvi təbiətindən, öyrənilən nümunələrin texnoloji mənşəyindən asılılığını tədqiq etmişik. Apardığımız eksperimental tədqiqatlar nəticəsində müəyyənləşdirilib ki, həmin monokristallarda məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsinin və mənfi fotokeçiriciliyin spektral paylanma xarakteristikaları (spektrləri), demək olar ki, üst-üstə düşür, induksiyanlanmış aşqar fotokeçiriciliyin spektri isə daha uzun dalğalar oblastına təsadüf edir. Temperaturun 77 K-dən başlayaraq yüksəlməsi ilə hər üç hadisə zəifləyir, daha doğrusu məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönmə dərinliyinin, mənfi fotokeçiriciliyin və induksiyanlanmış aşqar fotokeçiriciliyin mütləq qiymətləri kiçilir. Nəhayət, temperatur $T > 150$ K olduqda bu hadisələr müşahidə olunmur. Həm də müəyyənləşdirilmişdir ki, lantanidlərlə aşqarlama yalnız məxsusi fotokeçiriciliyin kinetikasına güclü təsir göstərir (şəkil 2). Aşqarlanma məxsusi fotokeçiriciliyin digər xarakteristikalarına da nəzərəcarpacaq təsir göstərsə də, məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsinin, mənfi fotokeçiriciliyin və induksiyanlanmış aşqar fotokeçiriciliyin xarakteristikalarının gedişinə isə təsir göstərmir. Daxil edilən aşqarın miqdarından asılı olaraq, yalnız bu fotokeçiricilik hadisələrinin xarakteristikalarının stabillik və təkrarlanma dərəcəsi əhəmiyyətli dərəcədə, həm də qeyri-monoton qaydada dəyişir. Bu halda ən dayanıqlı və yüksək dərəcədə təkrar olunan xarakteristikalar daxil edilən aşqarın $N \approx 5 \cdot 10^{-3}$ at.% miqdarında müşahidə olunur.



Şək. 2. Təmiz (1-3 əyriləri) və aşqarlanmış (4-6 əyriləri) n-InSe kristallarında məxsusi aşqar fotokeçiriciliyin kinetikasi

$$T=77 \text{ K}; \Phi_m=0.1 \Phi_m^{max}; \lambda_m=0.950 \text{ mkm}$$

$$\rho_{77}, \text{Om}\cdot\text{sm}: 1 - 2 \cdot 10^3; 2 - 5 \cdot 10^5; 3 - 3 \cdot 10^6$$

$$N, \text{at.}\%: 1, 2, 3 - 0; 4 - 10^{-4}; 5 - 10^{-3}; 6 - 10^{-1}$$

Tədqiq edilən nümunələrdə məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsinin və induksiyanmış aşqar fotokeçiriciliyin həm aşqar (Φ_a), həm də məxsusi işığın (Φ_m) intensivliyindən asılılığı - işıq xarakteristikaları, eləcə də mənfi fotokeçiriciliyin aşqar işığın intensivliyindən asılılığı da ölçülüb və həmin xarakteristikaların bircins kristal yarımkeçiricilər üçün xarakterik olan üstlü qanuna [2] tabe olduğu aşqar edilib.

Məxsusi fotokeçiriciliyi yaradan işığın tədqiq olunan nümunəyə təsirinin başlandığı və dayandırıldığı anlarda nümunənin elektrik keçiriciliyinin məxsusi fotokeçiriciliyin stasionar qiymətinə (i_{fs}) və ya ilkin qaranlıq hala (i_{T0}) relaksasiyası asta xarakterə malikdir [8]. İşığın təsiri kəsildikdən sonra fotoelektrik yaddaş hadisəsi müşahidə olunur (şəkil 2). Bu proseslərin relaksasiya müddəti isə həm Φ_m -in, həm də N və T -nin qiymətlərindən asılıdır. Müşahidə olunan fotoelektrik yaddaşın ədədi qiyməti ($i_{qf}=i_{kq}-i_{T0}$, burada i_{kq} - işığın təsiri kəsildikdən sonra, ölçmənin aparıldığı anda nümunədən axan kvaziqaranlıq cərəyanın qiymətidir) və davam etmə müddəti (τ_{fq}) daxil edilən lantanid aşqarının miqdarından asılıdır. N -nin qiymətinin artması ilə hər iki parametrin qiyməti $N=5 \cdot 10^{-3}$ at. %-da maksimumdan keçməklə qeyri-monoton dəyişirlər.

n-InSe kristallarının fotoelektrik xassələrinin tədqiqi zamanı [9, 10] göstərilib ki, həmin kristallar bütövlükdə kiçik xüsusi müqavimətli (KXM) əsas matrisadan və bu matrisadakı təsadüfi xarakterli böyük xüsusi müqavimətli (BXM) irimiqyaslı defektlərdən ibarət sistem [11] kimi təsvir edilə bilər. Onların qadağan olunmuş zonasında isə başlıca olaraq KXM matrisada lokallaşmış s -sürətli rekombinasiya və α -dayaz tutma mərkəzləri, eləcə də BXM defektlərdə lokallaşmış r -asta rekombinasiya və β -dərin tutma mərkəzləri [2] mövcuddur. Az miqdarda daxil edilmiş lantanid aşqarları mövcud olan ilkin BXM defektlərin üzərində toplanaraq, onların həcmi yüklər oblastının ölçüsünü daha da böyüdür. Bunun nəticəsində həmin monokristalların qismən nizamsızlıq dərəcəsi daha da yüksəlir və uyğun olaraq onlarda bu tip nizamsızlıqla bağlı olan proseslərin təzahürü güclənir. N -in qiymətinin sonrakı artmasında isə BXM defektlərin həcmi yüklər oblastının ölçülərinin daha da böyüməsi nəticəsində qonşu irimiqyaslı defektlər arasındakı məsafə çox kiçilir, daha doğrusu tarazlıqda olmayan sərbəst yükdaşıyıcıların tədqiq edilən nümunədəki diffuziya məsafəsindən böyük olmur. Nəticədə lantanidlə $N \geq 5 \cdot 10^{-2}$ at. % n-InSe monokristallarının nümunələri özlərini fəzaca bircins kristal yarımkeçirici kimi aparır. Nizamsızlıq dərəcəsinin N -in qiymətindən asılı olaraq belə qeyri-monoton dəyişməsi lantanidlərlə aşqarlanmış n-InSe monokristallarında asta relaksasiya edən fotoelektrik effektlərinin xarakterik parametrlərinin də N -dən asılı olaraq qeyri-monoton dəyişməsinə səbəb olur [12].

Təsvir olunan enerji modelinə görə məxsusi udma oblastından olan işıqla işıqlandırılan nümunələrdə yaranmış əsas yükdaşıyıcıların bir qismi fotokeçiricilik yaradır, digər qismi (uyğun olaraq qeyri-əsas yükdaşıyıcılar) isə r -rekombinasiya və α -tutma mərkəzləri tərəfindən tutulur. Nümunəni eyni

zamanda həm məxsusi ($h\nu \geq \varepsilon_g$ enerjili), həm də aşqar ($\varepsilon_r \leq h\nu_a \leq \varepsilon_g$ enerjili) udma oblastlarından olan işıq dəstələri ilə işıqlandırdıqda r -mərkəzləri tərəfindən tutulmuş qeyri-əsas yükdaşıyıcılar sərbəstləşir və həmin sərbəstləşmiş yükdaşıyıcılar sürətli s -rekombinasiya mərkəzləri vasitəsi ilə əsas yükdaşıyıcıların müəyyən bir hissəsini rekombinasiya edir. Nəticədə tədqiq olunan nümunədə məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsi hadisəsi baş verir. Bu halda r -asta rekombinasiya mərkəzlərinin ε_r -enerji dərinliyinin qiyməti məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsinin maksimumunun və ya qırmızı sərhədinin vəziyyətini təyin edir. Temperatur yüksəldikdə r -mərkəzlərin termik boşalması nəticəsində məxsusi fotokeçiriciliyin infraqırmızı sönməsi tədricən zəifləyir və $T \geq 180$ K olduqda enerji dərinliyi və sıxlığı uyğun olaraq $\varepsilon_\beta > \varepsilon_r$ və $N_\beta < N_r$ olan dərin β -tutma mərkəzlərinin boşalması hesabına yaranan məxsusi işıqla induksiyanmış aşqar fotokeçiricilik üstünlük təşkil etməyə başlayır.

Beləliklə, demək olar ki:

- n -InSe kristallarında məxsusi fotokeçiricilikdən fərqli olaraq, aşqar udma oblastında baş verən fotokeçiricilik hadisələri asta relaksasiya xarakterinə malik deyil.
- Lantanid aşqarlarının miqdarından asılı olaraq n -InSe kristallarında aşqar udma oblasındakı fotoelektrik hadisələrinin xassə və parametrlərinin sabillik, eləcə də təkrar olunma dərəcəsinin dəyişməsi, daxil edilən aşqarın miqdarından asılı olaraq həmin kristalların fəzaca nizamsızlıq dərəcəsinin uyğun şəkildə dəyişməsi ilə bağlıdır.
- Aşqarlanmamış və lantanidlərlə aşqarlanmış n -InSe monokristallarında mənfii fotokeçiricilik və məxsusi fotokeçiriciliyin optik sönməsi hadisələri bu yarımkəçiricinin qadağan olunmuş zonasında iki qrup (r -asta və s -sürətli) rekombinasiya mərkəzlərinin, induksiyanmış aşqar fotokeçiricilik hadisəsi isə α -dayaz tutma mərkəzlərinin olması ilə bağlıdır.
- Lantanidlərlə aşqarlanmış n -InSe monokristalları optik spektrin yaxın və orta infraqırmızı oblastları üçün işləmə mexanizmi yeni prinsiplərə əsaslanan yüksək həssaslığa, stabil və təkrarlanan parametrlərə, işıq qeydediciləri düzəltmək üçün perspektivlidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Розеншер Э., Винтер Б. Оптоэлектроника. М.: Техносфера, 2004, 23с.
2. Рывкин С.М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. М.: Наука, 1963, 429 с.
3. Медведева З.С. Халькогениды элементов III Б подгруппы периодической системы. М.: Наука, 1968, 214 с.
4. Luo W.G., Cao Y.F., Hu P.G., Cai K.M., Feng Q., Yan F.G., Yan T.F., Zhang X.H., Wang K.Y. Gate tuning of high performance InSe based photodetectors using graphene electrodes // Advanced optical material. 2015, v. 3. Issue 10, p.1418-1423.
5. Li W.B., Li J. Piezoelectricity in two-dimensional group-III monochalcogenides. // Nanoresearch, 2015, v. 8, Issue 12, p. 3796-3802.

6. Tamalampudi S.R., Lu Y.Y., Kumar U.R., Sankar R., Liao C.D., Moorthy B.K., Cheng C.H., Chou F., Chen Y.T. High performance and bendable few-layered InSe photodetectors with broad spectral response // Nano letters. 2014, v. 14. Issue 5, p. 2800-2806.
7. Milutinovic A., Lazarevic Z.Z., Jakovljevic M., Hadzic B., Petrovic M., Gilic M., Dobrowolski W.D., Romcevic N.Z. Optical properties of layered III–VI semiconductor γ -InSe:*M* (*M*=Mn, Fe, Co, Ni). // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 2016, v. 89, p.120-127.
8. Шейнкман М.К., Шик А.Я. Долговременные релаксации и остаточная проводимость в полупроводниках. // Физ. и техн. полупроводников, 1976, т.10, №2, с. 209-232.
9. Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф. Долговременная изотермическая релаксация темнового электросопротивления монокристаллов селенида индия, легированного диспрозием. // Неорганические материалы, 1995, т. 31, № 8, с. 1020-1022.
10. Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф., Амирова С.И., Рзаев Р.М. Влияние температуры и легирования редкоземельными элементами на подвижность носителей тока в кристаллах моноселенида индия. // Физ. и техн. полупроводников. 2013, т. 47, №8, с. 1009-1013.
11. Шик А.Я. Фотопроводимость случайно-неоднородных полупроводников // ЖЭТФ, 1972, Т. 15, с. 408-410.
12. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979, 416 с.

ИНФРАКРАСНЫЕ ФОТОПРИЕМНИКИ НА ОСНОВЕ ЛЕГИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛОВ n-InSe

**А.Ш.АБДИНОВ, Р.Ф.БАБАЕВА,
С.И.АМИРОВА, Н.А.РАГИМОВА, Э.А.РАСУЛОВ**

РЕЗЮМЕ

Исследованы инфракрасное гашение собственной фотопроводимости, отрицательная фотопроводимость, индуцированная примесная фотопроводимость в не легированных и легированных лантанидами (гольмием и эрбием) в количестве $N \approx 10^{-5} \div 10^{-1}$ at.% кристаллах n-InSe. Выявлено, что в этих кристаллах указанные явления наблюдаются при температуре $T \leq 150$ К. Спектр первых двух явлений охватывает диапазон длин волн $1.20 \leq \lambda \leq 1.90$ мкм, третьего – $1.90 \leq \lambda \leq 3.60$ мкм. С повышением температуры, начиная от 77 К все три явления ослабевают. Легирование лантанидами не оказывает влияние на характеристики этих фотоэлектрических явлений, но в зависимости от количества вводимой примеси меняется стабильность и степень повторяемости этих характеристик. Показано, что эта зависимость связана с изменением пространственной неоднородности исследуемых образцов в зависимости от количества вводимой примеси. В обеих группах (чистых и легированных) монокристаллов n-InSe явления отрицательной фотопроводимости и оптического гашения собственной фотопроводимости связаны с наличием двух групп центров рекомбинации, а индуцированной примесной фотопроводимости – мелких центров захвата в запрещенной зоне кристаллов n-InSe. На основе легированных лантанидами монокристаллов n-InSe можно изготовить высокочувствительные принципиально новые приемники ИК излучения со стабильными, повторяемыми характеристиками.

Ключевые слова: оптоэлектроника, монокристалл, фотоприемник, отрицательная фотопроводимость, макроскопический дефект, центры рекомбинации, центры захвата.

INFRARED RECEIVERS BASED ON DOPED n-InSe CRYSTALS

A.Sh.ABDINOV, R.F.BABAEVA, S.I.AMIROVA,
N.A.RAHIMOVA, E.A.RASULOV

SUMMARY

Infrared quenching of intrinsic photoconductivity, negative photoconductivity, and induced impurity photoconductivity in pure and doped lanthanides (holmium and erbium) in the amount of $N \approx 10^{-5} \div 10^{-1}$ at.% n-InSe crystals have been investigated. It is revealed that in these crystals the indicated phenomena are observed at a temperature $T \leq 150$ K. The spectrum of the first two phenomena covers the wavelength range of $1.20 \leq \lambda \leq 1.90$ μm , the third - $1.90 \leq \lambda \leq 3.60$ μm . With increasing temperature, starting from 77 K, all three phenomena weaken. Doping with lanthanides does not affect the characteristics of these photoelectric phenomena, but depending on the amount of the introduced impurity, the stability and the degree of repeatability of these characteristics change. It is shown that this dependence is associated with a change in the spatial inhomogeneity of the samples under study, depending on the amount of introduced impurity. In both groups (pure and doped) n-InSe single crystals, the phenomena of negative photoconductivity and optical quenching of intrinsic photoconductivity are associated with the presence of two groups of recombination centers, while induced impurity photoconductivity is associated with shallow trapping centers in the band gap of n-InSe crystals. On the basis of n-InSe single crystals doped with lanthanides, it is possible to fabricate highly sensitive, fundamentally new IR detectors with stable, repeatable characteristics.

Key words: optoelectronics, single crystal, photodetector, negative photoconductivity, macroscopic defect, recombination centers, trapping centers.

UOT 539.12-17

RADIATIVE HIGGS BOSON DECAYS $H(h; A) \Rightarrow f\bar{f}\gamma$ IN MSSM

S.K.ABDULLAEV, E.Sh.OMAROVA

*Baku State University**sabdullayev@bsu.edu.az, emiliya.abdullayeva@inbox.ru*

Within the framework of the Minimal Supersymmetric Standard Model, the processes of the radiative Higgs boson decays into a fermion-antifermion pair were studied: $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$. The diagrams corresponding to the radiation of the γ quanta by a fermion pair, as well as the fermion and W -boson loop diagrams, are considered. Taking into account the helicities of the fermion pair and the circular polarization of the γ quanta, analytical expressions are obtained for the widths of these decays. The degrees of the circular polarization of the γ quanta and the longitudinal polarization of the fermion are determined, and the dependence of these characteristics on the fermion emission angle θ and energy \sqrt{s} is studied in detail.

Keywords: Minimal Supersymmetric Standard Model, Higgs boson, fermion pair, interaction constant, circular polarization, decay width.

1.Introduction

With the discovery of the Higgs boson H in the Large Hadron Collider (LHC) by the ATLAS and CMS collaborations in 2012 [1,2] (see also reviews [3-6]), a new stage was begun in elementary particle physics. The mechanism of mass generation of fundamental particles was experimentally confirmed - the mechanism of spontaneous symmetry breaking by Braut – Engler – Higgs is a new stage in elementary particle physics. [7.8]. The standard model (SM) of fundamental interactions received a logical conclusion and acquired the status of a standard theory. SM is understood as a description of strong, electromagnetic, and weak interactions between quarks and leptons, based on a local gauge theory with the $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ symmetry group. Moreover, quarks are triplets, and leptons are singlets of the $SU_C(3)$ color group, the left components of quarks and leptons are doublets of the $SU_L(2)$ isospin group, and the right components are singlets, and they all have a weak hypercharge according to the $U_Y(1)$ group.

In SM, there are six leptons and six quarks that make up three generations. The carriers of strong, electromagnetic, and weak interactions are gluons, a photon, charged W^\pm bosons, and a neutral Z^0 boson. They are now supple-

mented by the fourth Yukawa interaction carried by the H_{SM} Higgs boson. Based on the SM, one can very accurately calculate the Feynman diagrams of processes and compare them with the corresponding experimental results. The agreement between SM calculations and experience is surprisingly well.

Despite the great successes, SM has its drawbacks. They are related to the fact that this model describes many phenomena, but does not allow us to deduce them from deeper principles.

The key point of SM is the Higgs mechanism, which successfully describes the physics of elementary particles. However, the SM does not provide any explanation for why the Higgs field exists at all and why it has the property of forming a vacuum condensate. In quantum field theory, vacuum is not an absolute void, but a sea of virtual particles. All particles of our world are dressed in a virtual fur coat. Mass, charge, and other characteristics are characteristics not of the original, but of particles dressed in a fur coat. Theorists take this into account using a mathematical procedure called renormalization. For all SM particles, renormalization works well, but in the case of the Higgs boson, a problem arises: virtual particles hang heavily on the Higgs boson mass, increasing trillions of times, and such a particle can no longer play the role of the Higgs boson. This difficulty is called the hierarchy problem. If in nature there are some other particles that are absent in the SM, then they in a virtual form can compensate for the effect on the mass of the Higgs boson. Such compensation in itself arises from the construction of a theory. It is such theories that attract theorists the most.

According to SM, neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) are massless particles. However, it has been experimentally proved that neutrinos have mass, and they are actively mixed with each other. The masses and mixing of neutrinos is not due to the Higgs mechanism, but due to a phenomenon of a different nature. In the SM there are no such phenomena, and in theories outside the SM such mechanisms exist.

In the Universe, in addition to ordinary particles of matter, there are particles of a completely different nature. They are particles of the so-called dark matter. In SM there is not a single particle for this role. Dark matter particles must be stable or very long-lived. Therefore, a neutral, stable and relatively heavy particle is needed. Possible candidates for dark matter particles are neutralino, sneutrino and gravitino, existing in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) [9-11].

In this model, two doublets of a scalar field with opposite hypercharges -1 and $+1$ are introduced:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

To obtain the physical fields of the Higgs boson, the fields φ_1 and φ_2 are written as

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 + H_1^0 + iP_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + H_2^0 + iP_2^0 \end{pmatrix}.$$

Where H_1^0, P_1^0, H_2^0 and P_2^0 are real fields describing the system excitations with respect to the vacuum states $\langle \varphi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$ and $\langle \varphi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$. The CP-even Higgs bosons H and h are obtained by mixing the fields H_1^0 and H_2^0 (mixing angle α):

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Similarly mix the fields P_1^0 and P_2^0, H_1^\pm and H_2^\pm (mixing angle β):

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\pm \\ H_2^\pm \end{pmatrix},$$

here, G^0 and G^\pm are neutral and charged Goldstone bosons, A is a CP-odd Higgs boson, and H^\pm is charged Higgs bosons. Thus, five Higgs particles appear in the MSSM: CP-even H - and h -bosons, CP-odd A -boson, and charged H^\pm -bosons.

In the MSSM, the Higgs sector is characterized by six parameters $M_H, M_h, M_A, M_{H^\pm}, \alpha$ and β . Of these, the parameters M_A and $\tan\beta$ are free. The parameter $\tan\beta$ is equal to the ratio $\frac{v_2}{v_1}$ and varies in the limit $1 \leq \tan\beta \leq \frac{m_t}{m_b} = 35.5$. Masses of CP-even H - and h - (charged H^\pm) bosons are expressed by masses M_A and M_Z (M_A and M_W):

$$M_{H(h)}^2 = \frac{1}{2} \left[M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right],$$

$$M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2.$$

The mixing angles of fields α and β are related by

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \cdot \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 \right)$$

Higgs bosons H, h, A – can decay through various channels (see works [9,12-15] and primary sources in them). One of the main channels for the decay of these MSSM bosons is the decay $(h; A) \Rightarrow \gamma + \gamma$, $H(h; A) \Rightarrow \gamma + Z$ [9, 16]. Along with these decays, much attention is paid to the radiative decay $H(h; A) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ [17–20], where $f\bar{f}$ is fundamental fermion pairs (leptons, quarks).

The aim of this work is to study the circular polarization of the γ quanta in the Higgs boson decays of the MSSM

$$H(h; A) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma, \quad (1)$$

here $f\bar{f}$ can be a lepton or quark pair. Using the MSSM, taking into account the helicities of the fermion pair and the circular polarization of the γ quanta, analytical expressions for the decay width are obtained. The dependence of the degree of circular polarization of the photon and the degree of longitudinal polarization of the fermion on the angle θ and the invariant mass x in these decays has been studied in detail.

2. Calculation of Feynman diagrams of bremsstrahlung

The radiative Higgs boson decays in the MSSM (1) is described by the Feynman diagrams shown in Fig. 1. Of these, diagrams a) and b) correspond to the bremsstrahlung of the γ quanta by a fermion pair. In the case of CP-even H - and h -boson decays, the decay amplitude can be written as (4-momenta of particles are given in parentheses):

$$M_{i \rightarrow f} = i g_{\Phi f f} e Q_f [\bar{u}_f(p_1, \lambda_1) R v_f(p_2, \lambda_2)], \quad (2)$$

where

$$R = \hat{e}^* \cdot \frac{\hat{p}_1 + \hat{k} + m_f}{(p_1 + k)^2 - m_f^2} - \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} - m_f}{(p_2 + k)^2 - m_f^2} \cdot \hat{e}^*,$$

$g_{\Phi f f}$ – the interaction constant of the Higgs boson Φ ($\Phi = H; h$) with the fermion pair (the interaction constants of the Higgs boson MSSM are given in Table 1), m_f and Q_f – mass and charge of the fermion f , e^* – 4-polarization vector of γ - quanta, λ_1 and λ_2 – spiralities of fermion and antifermion.

In the case A boson decay, the amplitude (2) will remain valid, however, due to the CP-oddness of this boson, R has the form:

$$R = \hat{e}^* \cdot \frac{\hat{p}_1 + \hat{k} + m_f}{(p_1 + k)^2 - m_f^2} \cdot \gamma_5 - \gamma_5 \cdot \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} - m_f}{(p_2 + k)^2 - m_f^2} \cdot \hat{e}^*.$$

Applying the Dirac Equations

$$\bar{u}_f(p_1, \lambda_1)(\hat{p}_1 - m_f) = 0, \quad (\hat{p}_2 + m_f)v_f(p_2, \lambda_2) = 0,$$

the amplitude (2) can be changed to:

$$M_{i \rightarrow f} = i A_0 \frac{g_{\Phi f f}}{g_{H_S M f f}} [\bar{u}_f(p_1, \lambda_1) R v_f(p_2, \lambda_2)]. \quad (3)$$

Here

$$A_0 = - \frac{2\pi\alpha_{KED}m_f}{M_W \sin\theta_W}, \quad (4)$$

$$R = \frac{2(e^* \cdot p_1) + \hat{e}^* \hat{k}}{2(p_1 \cdot k)} - \frac{2(e^* \cdot p_2) + \hat{k} \hat{e}^*}{2(p_2 \cdot k)}, \quad (5)$$

in the case CP even H and h boson decays, and when the CP-odd A - boson decays

$$R = \frac{2(e^* \cdot p_1) + \hat{e}^* \hat{k}}{2(p_1 \cdot k)} \cdot \gamma_5 - \gamma_5 \cdot \frac{2(e^* \cdot p_2) + \hat{k} \hat{e}^*}{2(p_2 \cdot k)} \quad (6)$$

in the expression $A_0 \theta_W$ is the Weinberg angle, the interaction constant of the standard Higgs boson with a fermion pair depends on the mass of the fermion:

$$g_{H_S M f f} = m_f [\sqrt{2} G_F]^{1/2},$$

G_F – Fermi constant of weak interactions.

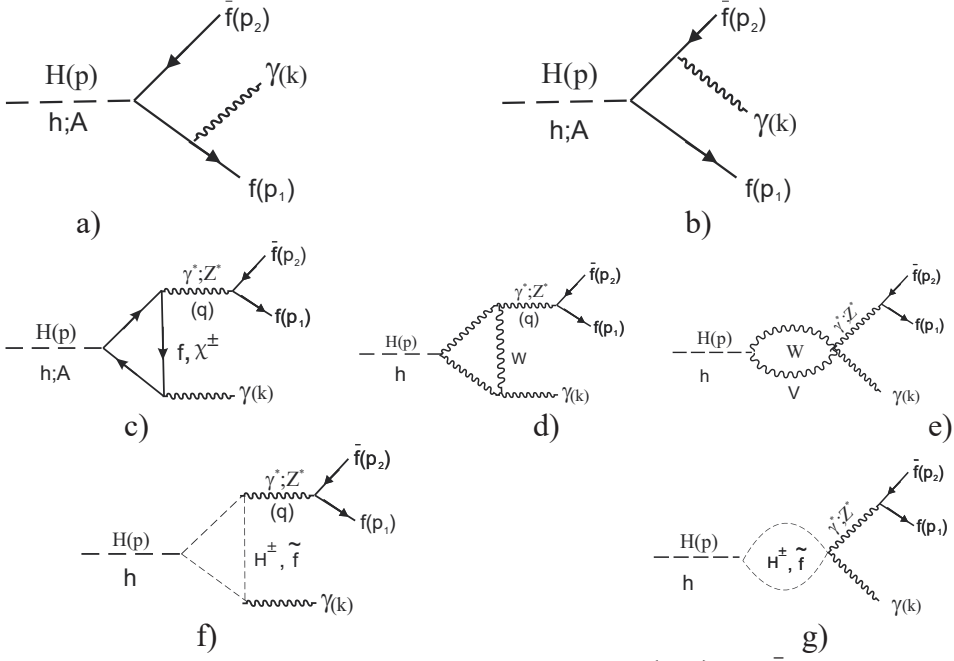


Fig. 1. Feynman diagrams for decay $H(h; A) \Rightarrow f \bar{f} \gamma$

Φ	$g_{\Phi tt} / g_{H_{SM} tt}$	$g_{\Phi bb} / g_{H_{SM} bb}$	$g_{\Phi \tau\tau} / g_{H_{SM} \tau\tau}$	$g_{\Phi WW} / g_{H_{SM} WW}$
H	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	$\cos(\beta - \alpha)$
h	$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$	$-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\sin(\beta - \alpha)$
A	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\tan\alpha$	0

Table 1. Higgs boson interaction constants in MSSM

The interaction constant of the Higgs bosons H, h, A with the fermion pair $f \bar{f}$ is proportional to the mass m_f . Consequently, in the decays of these bosons, the lepton pair $\tau^- \tau^+$ and $\bar{c}, b \bar{b}$ quark pairs are mainly produced. Due to the small mass, the decay channels $H(h; A) \Rightarrow e^- e^+ \gamma, \mu^- \mu^+ \gamma, u \bar{u} \gamma, d \bar{d} \gamma$ and $s \bar{s} \gamma$ are suppressed. The study of the radiative decay of $H(h; A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ shows particular interest, since the decay channels of $\tau^- \Rightarrow \pi^- \nu_\tau, \tau^- \Rightarrow K^- \nu_\tau, \tau^- \Rightarrow \rho^- \nu_\tau$, decay make it possible to measure the polarization of the τ -lepton. It should be noted that in the Higgs decays of the bosons H, h and A with a mass of 125 GeV and higher, the ratio of the squared masses is $\left(\frac{m_\tau}{M_H}\right)^2 \leq 0,0002 \ll 1, \left(\frac{m_c}{M_H}\right)^2 \leq 0,00017 \ll 1, \left(\frac{m_b}{M_H}\right)^2 \leq 0,0015 \ll 1$. Therefore, we can neglect the terms, are proportional to $\left(\frac{m_f}{M_H}\right)^2$. In this case, on the basis of amplitude (3) for the decay width $H(h; A) \Rightarrow f \bar{f} \gamma$, in the system of the center of mass of the fermion pair ($\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$) the expression is obtained:

$$\frac{d\Gamma(\lambda_1, \lambda_2, s_\gamma)}{dx d(\cos\theta)} = \frac{A_0^2 M_\Phi v}{2^{10} \pi^3 (1-x)} \cdot \left(\frac{g_{\Phi f f}}{g_{H S M f f}} \right)^2 \frac{N_C}{(1-v^2 \cos^2 \theta)^2} \{ (1 + \lambda_1 \lambda_2) (1 + x^2) (1 - v^2 \cos^2 \theta) + s_\gamma (\lambda_1 + \lambda_2) (1 - x) [2xv^2 \sin^2 \theta + (1 - x) (1 - v^2 \cos^2 \theta)] \}. \quad (7)$$

Here $s_\gamma = \pm 1$ is the circular polarization of the γ - quanta, θ is the angle between the directions of the Higgs boson and fermion momenta, x determines the invariant mass of the fermion pair in units of M_Φ^2 ($\Phi = H, h, A$):

$$x = \frac{q^2}{M_\Phi^2} = \frac{s}{M_\Phi^2} = \frac{(p_1 + p_2)^2}{M_\Phi^2},$$

$v = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}}$ – helicity of fermion, N_C – color factor (for the lepton pair $N_C = 1$, and for the quark pair $N_C = 3$).

Note that due to the conservation of the total moment in the $\Phi \Rightarrow f\bar{f}$ transition fermion and antifermion must have the same spiralities: $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$.

The decay width (5) also shows a longitudinally polarized fermion or anti-fermion can emit a circularly polarized γ - quanta. For $s_\gamma = +1$ γ - quanta has right circular polarization, and for $s_\gamma = -1$ it has left. We determine the degree of circular polarization of the γ quanta in the standard way:

$$P_\gamma(x, \cos\theta) = \frac{d\Gamma(\lambda_1; s_\gamma=1)/dx d(\cos\theta) - d\Gamma(\lambda_1; s_\gamma=-1)/dx d(\cos\theta)}{d\Gamma(\lambda_1; s_\gamma=1)/dx d(\cos\theta) + d\Gamma(\lambda_1; s_\gamma=-1)/dx d(\cos\theta)} = \lambda_1 \cdot \frac{(1-x)[2xv^2 \sin^2 \theta + (1-x)(1-v^2 \cos^2 \theta)]}{(1+x^2)(1-v^2 \cos^2 \theta)}. \quad (9)$$

Fig. 2 shows the degrees of circular polarization (9) in the $H(h; A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ processes from the invariant mass x at different angles departure of the τ^- - lepton θ : As can be seen, for $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 90^\circ$ the degree of circular polarization of the photon decreases up to $x = 1$.

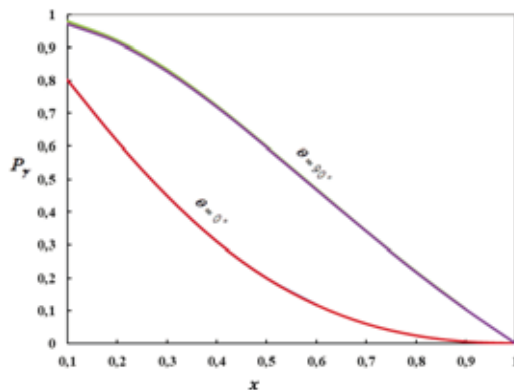


Fig. 2. The dependence of $P_\gamma(x, \cos\theta)$ on the variable x

Fig. 3 illustrates the dependence of P_γ in $H(A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ processes at a fixed value $x = 0.1$, $x = 0.2$ and $x = 0.3$. As can be seen, for $H(A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ processes P_γ gets approximately the same value at different invariant masses.

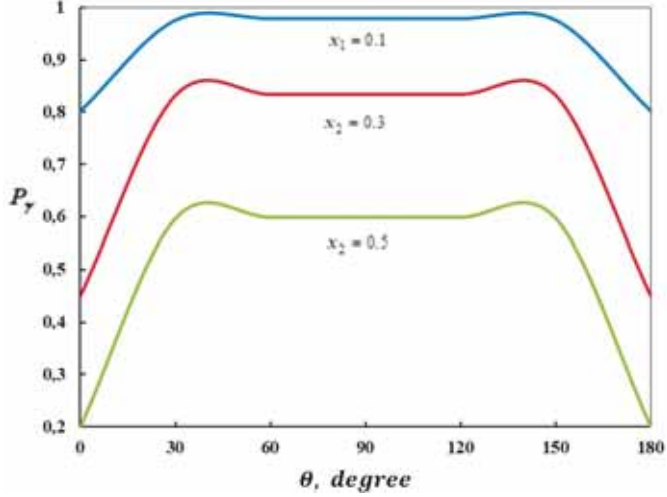


Fig. 3. Dependence of P_γ on angle θ in the $H(A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ process

We integrate the decay width (7) over the fermion departure angles θ and sum over the polarization states of the antifermion:

$$\frac{d\Gamma(\lambda_1, s_\gamma)}{dx} = \frac{A_0^2 M_\Phi v}{2^9 \pi^3} \cdot \left(\frac{g_{\Phi ff}}{g_{H_{SM} ff}} \right)^2 \frac{N_C}{1-x} \{ (1+x^2)L + \lambda_1 s_\gamma (1-x)[-2x + (1+xv^2)L] \}, \quad (10)$$

where

$$L = \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v}.$$

For the degree of circular polarization γ quanta from formula (10) we obtain the formula:

$$P_\gamma(x) = \lambda_1 \cdot \frac{(1-x)[-2x + (1+xv^2)L]}{(1+x^2)L}. \quad (11)$$

Figure 4 shows the dependence of the degree of circular polarization γ quanta in the $h \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ reaction on the variable x at $M_h = 70.025$ GeV. As can be seen from the figure, for $\lambda_1 = 1(-1)$, the degree of circular polarization γ quanta is positive (negative) and monotonically decreases (increases) to zero. A similar dependence is also observed in the Higgs bosons decays $H(A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ (see Fig. 5).

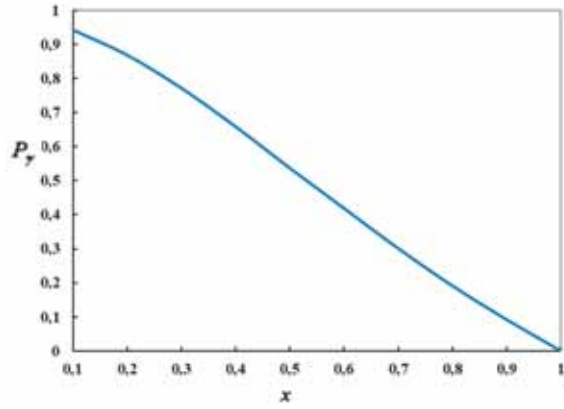


Fig. 4. The dependence of $P_\gamma(x)$ on the variable x in the $h \Rightarrow \tau^- \tau^+ \gamma$ process

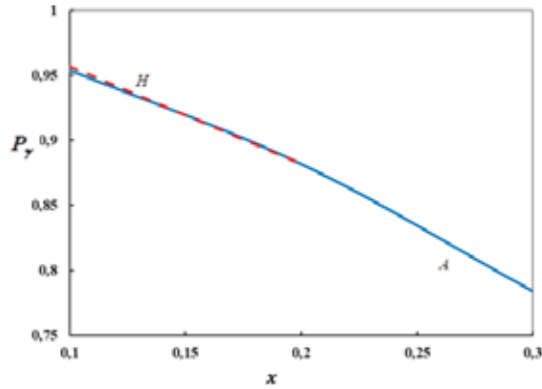


Fig. 5. The dependence of $P_\gamma(x)$ on the x in the $H(A) \Rightarrow \tau^- \tau^+ \gamma$

Figure 6 shows the dependence of the decay widths $h(H; A) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ on the invariant mass x at $M_A = 200$ GeV ($M_h = 70.025$ GeV, $M_H = 208.355$ GeV), $M_W = 80.385$ GeV, and $\sin^2 \theta_W = 0.2315$. With an increase of the invariant mass, the decay widths monotonly increase, this is especially observed in the decay of a CP-even h boson with a small mass M_h .

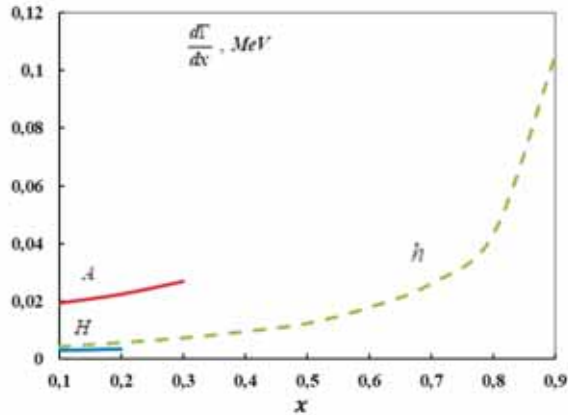


Fig. 6. Dependence of the decay width on x

3. Fermion and W - boson loop diagrams and other loop diagrams

The amplitude corresponding to the bremsstrahlung of the γ -quanta by the fermion pair (diagrams a) and b) in Fig. 1) is proportional to the mass of the fermion m_f , therefore, decay widths $H(h; A) \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma, \mu^- + \mu^+ + \gamma, u + \bar{u} + \gamma, d + \bar{d} + \gamma, s + \bar{s} + \gamma$, are suppressed. In these decays, fermion, W - boson and other loop diagrams play an essential role. Typical single-loop Feynman diagrams are shown in Fig. 1. They are the photon and Z - boson pole diagrams of the $H(h; A) \Rightarrow \gamma + \gamma^* \Rightarrow \gamma + f + \bar{f}$ and $H(h; A) \Rightarrow \gamma + Z^* \Rightarrow \gamma + f + \bar{f}$ decays. Besides fermion and w - boson loop diagrams in $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decays, there are charged Higgs boson, scalar fermion, and chargino loop diagrams. Fermion and chargino loop diagrams contribute to the CP - odd A - boson decay $A \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$. We turn to the calculation of loop Feynman diagrams.

The amplitude of the $H(h) \Rightarrow f\bar{f}\gamma$ decays corresponding to the fermion loop diagrams of Fig. 1 can be represented as

$$M_{LOOP}^{(fermion)} = ig_{\phi f f} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{Sp[\gamma_\mu(\hat{k}_1 + \hat{q} + m)(\hat{k}_1 - \hat{k} + m)\gamma_\nu(\hat{k}_1 + m)]}{(k_1^2 - m^2)[(k_1 + q)^2 - m^2][(k_1 - k)^2 - m^2]} \cdot e_\nu^* \times \\ \times \frac{g_{\mu\rho}}{q^2} [\bar{u}(p_1)\gamma_\rho v(p_2)], \quad (12)$$

where m is the mass of the loop fermion.

Using the Feynman integration technique, we can carry out integration over k_1 , as a result, we have the amplitude:

$$M_{LOOP}^{(fermion)} = M_1 + M_2, \quad (13)$$

$$M_1 = (e^* \cdot q)\bar{u}(p_1, \lambda_1)[A_1\hat{k} + A_2\hat{k}\gamma_5]v(p_2, \lambda_2) - (k \cdot q)\bar{u}(p_1, \lambda_1)[A_1\hat{e}^* + A_2\hat{e}^*\gamma_5]v(p_2, \lambda_2), \\ M_2 = -i(\mu e^* k q)_\varepsilon \bar{u}(p_1, \lambda_1)[A_3\gamma_\mu + A_4\gamma_\mu\gamma_5]v(p_2, \lambda_2). \quad (14)$$

Where

$$A_1 = g_V(f)D_Z(s)P_{s\gamma Z} - \frac{1}{s}P_{\gamma\gamma}, \quad A_2 = \\ g_A(f)D_Z(s)P_{s\gamma Z}, \quad (15)$$

$$A_3 = g_V(f)D_Z(s)P_{a\gamma Z}, \quad A_4 = g_A(f)D_Z(s)P_{a\gamma Z},$$

$$D_Z(s) = (s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)^{-1}, \quad (\mu e^* k q)_\varepsilon = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_\nu^* k_\rho q_\sigma,$$

$$g_V(f) = \frac{T_f - 2Q_f \sin^2 \theta_W}{2\sin\theta_W \cdot \cos\theta_W}, \quad g_A(f) = \frac{T_f}{2\sin\theta_W \cdot \cos\theta_W},$$

$$P_{a\gamma Z} = \frac{\alpha_{KED}^2}{M_W \sin\theta_W} \cdot \frac{N_C e_f I_f}{\sin\theta_W \cos\theta_W} A_{f_2}(\tau_f, \lambda_f), \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
P_{SYZ} &= \frac{\alpha_{KED}^2}{M_W \sin \theta_W} \left(-2N_C \frac{I_f - 2e_f \sin^2 \theta_W}{\sin \theta_W \cos \theta_W} A_{f_1}(\tau_f, \lambda_f) \right), \\
P_{\gamma\gamma} &= \frac{\alpha_{KED}^2}{M_W \sin \theta_W} \cdot (-4N_C) \cdot e_f^2 A_{f_1}(\tau_f, \lambda_f), \\
A_{f_1}(\tau, \lambda) &= I_1(\tau, \lambda) - I_2(\tau, \lambda), \\
A_{f_2}(\tau, \lambda) &= \frac{\tau\lambda}{\lambda - \tau} [2g(\tau) - 2g(\lambda) + f(\tau) - f(\lambda)], \\
I_1(\tau, \lambda) &= \frac{\tau\lambda}{2(\tau - \lambda)} + \frac{\tau^2\lambda^2}{2(\tau - \lambda)^2} [f(\tau) - f(\lambda)] + \\
&\frac{\tau^2\lambda}{(\tau - \lambda)^2} [g(\tau) - g(\lambda)],
\end{aligned} \tag{17}$$

$$I_2(\tau, \lambda) = -\frac{\tau\lambda}{2(\tau - \lambda)} [f(\tau) - f(\lambda)],$$

and the functions $f(\tau)$ and $g(\tau)$ are equal:

$$\begin{aligned}
f(\tau) &= \begin{cases} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{\tau}} & \tau \geq 1 \\ -\frac{1}{4} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right]^2 & \tau < 1, \end{cases} \\
g(\tau) &= \begin{cases} \sqrt{\tau - 1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{\tau}} & \tau \geq 1 \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \tau} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} - i\pi \right] & \tau < 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

τ and λ are given by the relations:

$$\tau = \frac{4m^2}{M_H^2}, \quad \lambda = \frac{4m^2}{s}.$$

Here e_f and I_f are the charge and the third projection of the weak isospin of the loop fermion; $g_V(f)$ and $g_A(f)$ are the vector and axial-vector coupling constants of fermion f ; M_Z and Γ_Z are the mass and total decay width of the Z boson; T_f is the third projection of the weak isospin of fermion f , in the case of a t -quark loop we have: $\tau = \frac{4m^2}{M_H^2} > 1$, $\lambda = \frac{4m^2}{s} > 1$.

In the unitary gauge we have three W -boson loop diagrams. The $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay amplitude of these diagrams is determined by formula (13), however, the expressions P_{SYZ} and $P_{\gamma\gamma}$ change, they contain the contributions of both fermion and W -boson loop diagrams:

$$\begin{aligned}
P_{SYZ} &= \frac{\alpha_{KED}^2}{M_W \sin \theta_W} \left[-ctg \theta_W A_W(\tau_W, \lambda_W) - \right. \\
&\left. 2N_C e_f \frac{I_f - 2e_f \sin^2 \theta_W}{\sin \theta_W \cos \theta_W} A_{f_1}(\tau_f, \lambda_f) \right],
\end{aligned}$$

$$P_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha_{KED}^2}{M_W \sin\theta_W} \cdot [-A_W(\tau_W, \lambda_W) - 4N_C e_f^2 A_{f_1}(\tau_f, \lambda_f)], \quad (18)$$

$$A_W(\tau, \lambda) = \left[\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) \left(\frac{4}{\lambda} - 1\right) - \left(5 + \frac{2}{\tau}\right) \right] I_1(\tau, \lambda) + 16 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) I_2(\tau, \lambda).$$

The $\Phi \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ ($\Phi = H; h$) decay width, containing the contributions of fermion and W -boson loop diagrams, can be written as

$$\frac{d\Gamma(\lambda_1, \lambda_2, s_\gamma)}{dx d(\cos\theta)} = \frac{(M_\Phi^2 - s)^3}{2^{11} \pi^3 M_\Phi} \cdot \left(\frac{g_{\Phi ff}}{g_{HSMff}} \right)^2 sv \{ (1 - \lambda_1 \lambda_2) [(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2) (1 + v^2 \cos^2\theta) +$$

$$+ 4Re(A_1 A_2^* + A_3 A_4^*) s_\gamma v \cos\theta + 2Re(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*) s_\gamma (1 + v^2 \cos^2\theta) +$$

$$+ 4Re(A_1 A_4^* + A_2 A_3^*) v \cos\theta] + (\lambda_2 - \lambda_1) [(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2) 2s_\gamma v \cos\theta +$$

$$+ 2Re(A_1 A_2^* + A_3 A_4^*) (1 + v^2 \cos^2\theta) + + 2Re(A_1 A_4^* + A_2 A_3^*) s_\gamma (1 + v^2 \cos^2\theta) +$$

$$+ 4Re(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*) v \cos\theta] \}. \quad (19)$$

This formula shows that in $\Phi \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay the fermion and antifermion should have opposite spiralities: $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$ ($f_R \bar{f}_L$ or $f_L \bar{f}_R$, where $f_L(\bar{f}_L)$ and $f_R(\bar{f}_R)$ are the right and left-polarized fermion (antifermion)). This is due to the preservation of the full moment in the transitions $\gamma^* \Rightarrow f + \bar{f}$ and $Z^* \Rightarrow f + \bar{f}$.

As noted in the previous section, when γ -quanta is emitted by a fermion pair, the fermion and antifermion must have the same spiralities $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ ($f_R \bar{f}_R$ or $f_L \bar{f}_L$). Thus, by the spiral properties of the fermion pair, we can separate the contributions of the fermion and W -boson loop diagrams from the radiation diagrams of the fermion pair. At $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$, the contribution to the decay amplitude of the $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ diagrams of bremsstrahlung vanishes, and at $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, on the contrary, the contribution of the loop diagrams vanishes.

Let us consider some particular cases of the decay width (19). First, we summarize the polarization states of the fermion pair. Then, for the $\Phi \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay width, the expression is obtained:

$$\frac{d\Gamma(s_\gamma)}{dx d(\cos\theta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\Gamma_0}{dx d(\cos\theta)} [1 + s_\gamma P_\gamma(s, \cos\theta)], \quad (20)$$

Where

$$\frac{d\Gamma_0}{dx d(\cos\theta)} = \frac{(M_\Phi^2 - s)^3}{2^8 \pi^3 M_\Phi} \cdot \left(\frac{g_{\Phi ff}}{g_{HSMff}} \right)^2 sv \{ [(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2) (1 + v^2 \cos^2\theta) +$$

$$+ 4Re(A_1 A_4^* + A_2 A_3^*) v \cos\theta] \} \quad (21)$$

decay width $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ in the case of unpolarized particles, and

$$P_\gamma(s, \cos\theta) = \frac{2\text{Re}(A_1A_3^* + A_2A_4^*)(1+v^2\cos^2\theta) + 4\text{Re}(A_1A_2^* + A_3A_4^*)v\cos\theta}{[|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2](1+v^2\cos^2\theta) + 4\text{Re}(A_1A_4^* + A_2A_3^*)v\cos\theta}. \quad (22)$$

is the degree of circular polarization of the γ quanta due to weak neutral currents.

Figures 7 and 8 illustrate the energy dependence of the degree of circular polarization γ quanta $H(h) \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decays at an electron emission angle $\theta = 60^\circ$ and $\theta = 90^\circ$. The calculations assumed that $M_h = 70.025$ GeV, $M_H = 208.355$ GeV, $m_t = 173.2$ GeV, $M_Z = 91.1875$ GeV, $M_W = 80.385$ GeV, $\Gamma_Z = 2.4952$ GeV, $\sin^2\theta_W = 0.2315$. It follows from the figures that in the $H \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ Higgs boson decay, the degree of circular polarization of the γ quanta is close to zero and almost independent of the energy \sqrt{s} . At the electron emission angle $\theta = 60^\circ$ ($\theta = 90^\circ$), the degree of circular polarization of the γ quanta in $h \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decay decreases with increasing energy and reaches a minimum near the energy $\sqrt{s} = 80$ GeV, a further increase in energy leads to an increase in the degree of circular polarization of the γ quanta.

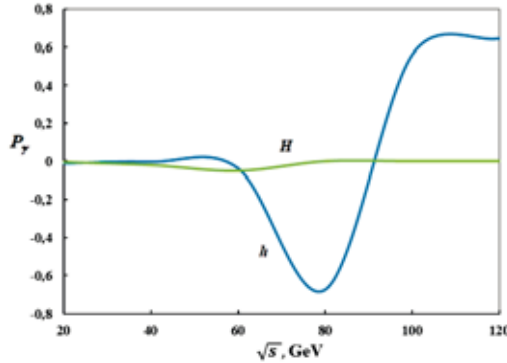


Fig. 7. Energy dependence of $P_\gamma(s, \cos\theta)$ in $H(h) \Rightarrow e^-e^+\gamma$ decays at $\theta = 60^\circ$

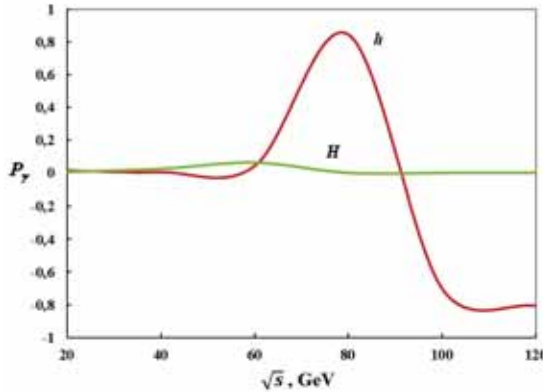


Fig. 8. Energy dependence of $P_\gamma(s, \cos\theta)$ in $H(h) \Rightarrow e^-e^+\gamma$ decays at $\theta = 90^\circ$

Figure 9 shows the angular dependence of the degree of circular polarization of γ quanta $P_\gamma(s, \cos\theta)$ in the $h \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decay ($M_h = 70.025$ GeV) at various energies $\sqrt{s} = 80$ GeV, $\sqrt{s} = M_Z$, $\sqrt{s} = 120$ GeV. As can be seen from the figure, at an energy of $\sqrt{s} = M_Z = 91.1875$ GeV, the degree of circular polarization of the γ quanta at the beginning of the angular spectrum is positive and slowly decreasing vanishes at $\theta = 90^\circ$ and then becomes negative.

At an energy of $\sqrt{s} = 80$ GeV (120 GeV), the degree of circular polarization of the γ -quanta is negatively positive, with an increase in the emission angle θ $P_\gamma(s, \cos\theta)$ it gradually increases (decreases) and vanishes at an angle $\theta = 90^\circ$. A further increase in the angle of departure θ leads to an increase (decrease) in the degree of circular polarization of the γ - quanta.

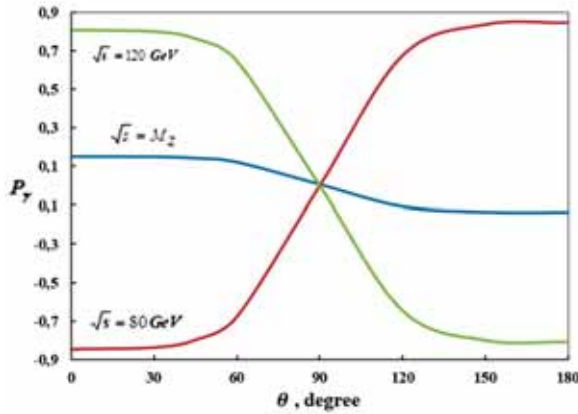


Fig. 9. The dependence of $P_\gamma(s, \cos\theta)$ on the angle θ in the $h \Rightarrow e^- e^+ \gamma$ process at various energies

Another CP odd quantity is the degree of longitudinal polarization of the electron. Summing over the polarization states of the γ - quanta and antifermion, the expression for the $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay width is obtained:

$$\frac{d\Gamma(\lambda_1)}{dx d(\cos\theta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\Gamma_0}{dx d(\cos\theta)} [1 + \lambda_1 P_e(s, \cos\theta)], \quad (23)$$

here

$$P_e(s, \cos\theta) = - \frac{2\text{Re}(A_1 A_2^* + A_3 A_4^*)(1+v^2 \cos^2\theta) + 4\text{Re}(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*)v \cos\theta}{[|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2](1+v^2 \cos^2\theta) + 4\text{Re}(A_1 A_4^* + A_2 A_3^*)v \cos\theta} \quad (24)$$

is the degree of longitudinal polarization of the fermion in $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay.

Figure 10 shows the energy dependence of the degree of longitudinal polarization of an electron in the $h \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decay. Due to $\text{Re}(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*) \approx 0$ and $\text{Re}(A_1 A_4^* + A_2 A_3^*) \approx 0$, the degree of longitudinal polarization of the electron does not depend on the emission angle θ , is only a function of energy \sqrt{s} . With an increase in the energy of the electron - positron pair \sqrt{s} , the degree of longitudinal polarization of an electron P_e increases and reaches a

maximum at an energy of $\sqrt{s} = 80$ GeV, and a further increase in energy leads to a decrease in the degree of longitudinal polarization of an electron; at an energy of $\sqrt{s} \approx 90$ GeV, P_e vanishes and then changes sign becomes negative.

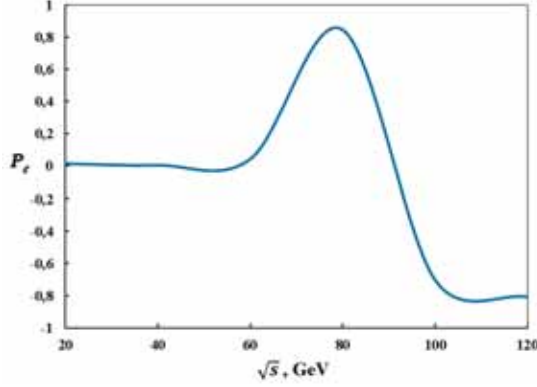


Fig. 10. Energy dependence of $P_e(s, \cos\theta)$ in the $h \Rightarrow e^- e^+ \gamma$

Integrating the expression for the decay width (19) over the fermion emission angles θ , we obtain (the pair spin correlation of the fermion- γ - quanta ($\lambda_1 \cdot s_\gamma$) is not taken into account for the polarization of the antifermion):

$$\frac{d\Gamma(\lambda_1, s_\gamma)}{dx} = \frac{1}{4} \cdot \frac{d\Gamma_0}{dx} [1 + s_\gamma P_\gamma(s) + \lambda_1 P_e(s)]. \quad (25)$$

Here

$$\frac{d\Gamma_0}{dx} = \frac{(M_\Phi^2 - s)^3}{2^8 \pi^3 M_\Phi} \cdot \left(\frac{g_{\Phi f f}}{g_{H_S M f f}} \right)^2 \left(1 + \frac{v^2}{3} \right) s v [|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2] \quad (26)$$

- $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decay width for unpolarized particles and

$$P_\gamma(s) = \frac{2 \operatorname{Re}(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*)}{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2}, \quad (27)$$

$$P_e(s) = - \frac{2 \operatorname{Re}(A_1 A_2^* + A_3 A_4^*)}{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2} \quad (28)$$

is degrees of circular polarization of the γ -quanta and longitudinal polarization of the fermion.

Due to $\operatorname{Re}(A_1 A_3^* + A_2 A_4^*) = 0$, the degree of circular polarization of the γ quanta in $H(h) \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decays is zero, and Fig. 10 characterizes the dependence of the degree of longitudinal polarization of the electron in the $h \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decay at $M_h = 70.025$ GeV.

We note that in addition to fermion and w - boson loop diagrams in $H(h) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$ decays, the Higgs charged boson H^\pm , chargino χ^\pm , and scalar fermion \tilde{f}^\pm loop diagrams also contribute to the decay width. The calculation of all these loop diagrams is outlined in another paper.

4. Conclusion

Thus, we discussed the radiative Higgs boson decays in MSSM into a fermion pair $H(h; A) \Rightarrow f + \bar{f} + \gamma$. The diagrams corresponding to the emission

of a photon by a fermion pair, as well as the fermion and W - boson loop diagrams, are considered. The degrees of circular polarization of the γ - quanta and the longitudinal polarization of the fermion are determined, and their dependence on the exit angle θ and the invariant mass of the fermion pair x in the $H(h) \Rightarrow \tau^- + \tau^+ + \gamma$ and $H(h) \Rightarrow e^- + e^+ + \gamma$ decays is investigated in detail. The research results are illustrated by graphs

BIBLIOGRAPHY

1. ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson at the ATLAS detector at the LHC. Phys. Letters, 2012. B 716, p. 1-29.
2. CMS Collaboration. Observation of a new boson at mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. Phys. Letters, 2012, B 716, p. 30-61.
3. V. A. Rubakov. On Large Hadron Colliders discovery of a new particle with Higgs boson properties. // UFN, 2012, v.182, №.10, p.1017-1025 (in Russian).
4. E. E. Boos. Standard Model and predictions for Higgs boson. // UFN, 2014, v.184, №.9, p.986-996 (in Russian).
5. A. V. Lanev. CMS Collaboration results: Higgs boson and search for new physics. // UFN, 2014, v.184, №9, p.996-1004 (in Russian).
6. D. I. Kazakov. The Higgs boson is found: what is next?. // UFN, 2014, v.184, №9, p.1004-1016 (in Russian).
7. P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. // Phys. Rev. Letters, 1964, V.13, №16, p.508.
8. F. Englert, R. Brout. Broken Symmetry and the mass of gauge vector bosons. // Phys. Rev. Letters, 1964, V.13, №9, p.321.
9. A. Djouadi The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking. Tome II. The Higgs Boson in the MSSM. arXiv: hep – ph / 0503173v2, 2003.
10. J. F. Gunion, H. E. Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (I) // Nucl. Phys., 1986, v. B 272, p.1-76.
11. J. F. Gunion, H. E. Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (II) // Nucl. Phys., 1986, v. B 278, p.449-492.
12. A. Djouadi, J. Kalinowski, P. M. Zerwas. Two – and Three- Body Decay Modes of SUSY Higgs Particles. arXiv: hep – ph / 9511342v1, 1995.
13. S.K.Abdullayev, E.Sh.Omarova. Two- and three-particle decay channels of supersymmetric Higgs bosons. // Azerb. Journal of Physics, Fizika, 2019, V. XXV, №4, p. 29-39.
14. S.K.Abdullayev, E.Sh.Omarova. Decays of Higgs Bosons into a gauge boson and a fermion-antifermion pair. Russian Physics Journal, 2019, V.62. №1, p. 30-38.
15. S.K.Abdullayev, E.Sh.Omarova. Three-particle decays of the Higgs Bosons in the Minimal Supersymmetric Standard Model. // Russian Physics Journal, 2019, V.62. №3, p. 425-435.
16. S.K.Abdullayev, E.Sh.Omarova. Decay channels of Higgs Bosons $H \Rightarrow \gamma\gamma, H \Rightarrow \gamma Z, H^\pm \Rightarrow \gamma W^\pm$. Journal of Baku Engineering University – Physics, 2019, V.3, №1, p. 39-57.
17. R. Akbar, I. Ahmed, M. J. Aslam. Lepton polarization asymmetries of $H \Rightarrow \gamma\tau^+\tau^-$ decay in the Standard Model. Prog. Theor. Exp. Phys., 20114, p. 093B03.
18. C. – S. Li, S. – H. Zhu, C. – F. Qiao. Radiative Higgs Boson decays $H \Rightarrow f\bar{f}\gamma$ Beyond the Standard Model. arXiv: hep – ph / 9801334v2, 1998, 13 p.
19. A.Yu.Korchin, V.A.Kovalchuk. Polarization effects in the Higgs Boson decay to γZ and test of CP and CPT symmetries arXiv: 1303.0365v3 [hep – ph], 2013, 9 p.
20. Yi Sun, H.-R. Chang, D.-N. Gao. Higgs decays to γl^{+l} in the Standard Model. arXiv: 1303.2230v2, [hep-ph], 2013, 16 p.

MSSM-DƏ HİQQS BOZONUN RADİASİYA PARÇALANMALARI $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$

S.Q.ABDULLAYEV, E.Ş.ÖMƏROVA

XÜLASƏ

Minimal Supersimmetrik Standart Model çərçivəsində Hiqqs bozonun fermion-antifermion cütünə radiasiya parçalanması prosesi tədqiq edilmişdir: $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$. Fotonun fermion cütü tərəfindən tormozlanma şüalanması və fermionlarla W - bozonların ilgək diaqramları mexanizmləri ətraflı nəzərdən keçirilmişdir. Fermionların spirallıqları və γ -kvantın dairəvi polyarlaşmasını nəzərə almaqla proseslərin parçalanma enləri üçün analitik ifadələr alınmışdır. γ - kvantın dairəvi polyarlaşma və fermionun uzununa polyarlaşma dərəcələri müəyyən edilmişdir və bu kəmiyyətlərin polyar θ bucağından və \sqrt{s} enerjisindən asılılığı dərinədən öyrənilmişdir.

Açar sözlər: Minimal Supersimmetrik Standart Model, Hiqqs bozon, fermion cütü, qarşılıqlı təsir sabiti, dairəvi polyarlaşma, parçalanmanın eni.

РАДИАЦИОННЫЕ РАСПАДЫ ХИГГС БОЗОНОВ $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$ В МССМ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, Э.Ш.ОМАРОВА

РЕЗЮМЕ

В рамках Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели изучены процессы радиационного распад Хиггс бозонов на фермион-антифермионную пару: $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$. Рассмотрены диаграммы, соответствующие излучению γ -кванта фермионной парой, а также фермионные и W - бозонные петлевые диаграммы. С учетом спиральностей фермионной пары и циркулярной поляризации γ -кванта получены аналитические выражения для ширины указанных распадов. Определены степени циркулярной поляризации γ -кванта и продольной поляризации фермиона, подробно изучена зависимость этих характеристик от угла вылета фермиона θ и энергии \sqrt{s} .

Ключевые слова: Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель, фермионная пара, константа взаимодействия, Хиггс бозон, ширина распада, циркулярная поляризация.

УДК 548.74

PACS: 61.66.Fn

**ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ ТЕРМООБРАБОТКЕ
АМОРФНЫХ ПЛЕНОК $TlInSnSe_2$ ЛЕГИРОВАННЫХ ОЛОВОМ****М.М.ПАНАХОВ¹, Э.Ш.АЛЕКПЕРОВ¹, Э.С.ГАРАЕВ¹,
С.А.САДРАДДИНОВ¹, А.М.НАЗАРОВ², С.С.ФАРЗАЛИЕВ²**¹*Бакинский государственный университет*²*Институт физики НАНА**alekperoveldar@mail.ru*

Методом дифракции электронов высоких энергий исследован процесс кристаллизации аморфных плёнок $TlInSe_2$, легированных примесями олова. Показано, что кристаллизация аморфных плёнок толщиной 30 нм, полученных в высоком вакууме термическим методом, происходит по закономерностям, установленным Авраами – Колмогоровым, и описывается аналитическим выражением $V_t = V_0[1 - \exp(-kt^m)]$. По кинематическим электронограммам плёнок $TlIn_{1-x}Sn_xSe_2$ определено влияние примеси олова на значения энергий активаций зародышеобразования и дальнейшего их роста.

Ключевые слова: электронография, легирование, структура, аморфная фаза, кинетика, кристаллизация

Исследование структурных характеристик нанотолщинных полупроводниковых плёнок типа $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ с различными примесями и твердых растворов на их основе с каждым днем приобретает всю большую актуальность. Соединения, входящие в указанную группу, относятся в основном, к широкозонным запрещенным зонам в которых можно плавно изменять ширину запрещенной зоны. Изменением технологического процесса получения пленок, а также легированием удаётся модифицировать их структуру [1-4]. Эти сложные полупроводниковые соединения являются в основном анизотропными и представляют научный интерес для современной оптоэлектроники [5-8].

Соединение $TlInSe_2$ является одним из представителей неполновалентных полупроводниковых соединений с цепочечной структурой, обладающих специфическим строением кристаллической решетки. Кинетические параметры кристаллизации наноразмерных плёнок $TlInSe_2$ исследованы и установлены в [9]. Экспериментальные данные о взаимодействии атомов в твердых телах, о валентных электронах в атомах возмож-

но получить методами дифракции электронов [10, 11], из которых наиболее подходящим для исследований в указанном направлении является электронографический метод. Пользуясь этим методом, исследовали влияние легирования химического элемента Sn на кинетику фазовых превращений аморфных плёнок TlInSe_2 , кристаллизующихся в структуре с объёмно центрированной тетрагональной решеткой, соответствующей группе симметрии $D_{4h}^{18} - I4/mcm$ [12]. Эксперименты по изучению полупроводников, легированных примесями, можно разделить на две группы. К первой принадлежат работы, в которых изучалось изменение зонной структуры, обусловленное, главным образом, искажением кристаллической решетки полупроводника. Ко второй группе относится исследование хвоста плотности состояний, распространяющегося вглубь запрещенной зоны.

Сложность изучения этих вопросов заключается в том, что зачастую неизвестен механизм роста пленок. Исследование температурно-временной зависимости кристаллизации пленок способствует уяснению механизма их роста.

Экспериментальная часть

Исследуемые тонкие плёнки получают различными методами, одним из которых является термическое испарение в вакуумной установке. В данной работе аморфные пленки $\text{TlIn}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}_2$ ($x=0.02\div 0.09$) толщиной ~ 30 нм были получены в вакууме 3×10^{-5} Па в установке ВУП-5, термическим методом одновременным осаждением TlInSe_2 и Sn из двух молибденовых печей на подложки из свежих сколов KCl, NaCl и KJ находящиеся ниже температуры 403К и предварительно покрытые угольной плёнкой. Время осаждения составило $5\div 10$ секунд. Для получения плёнок с равномерным распределением примесей принималась в расчет величина коэффициента разделения вещества. На полученные плёнки для предотвращения испарения легколетучего компонента и окислительных процессов в результате последующей термообработки плёнок сверху вновь наносили плёнку углерода толщиной 2-3 нм. Растворив подложку, исследуемую пленку переносили на вольфрамовую печку-подложку, где она подвергалась термообработке.

Распределение состава конденсата по координатам на плоскости конденсации определялось с помощью известной в кристаллографии [10] формулы:

$$q = \frac{Q}{4\pi h^2} \frac{1}{(1 + \alpha)^{3/2}} \quad (1).$$

Здесь q – количество вещества на единице плоскости поверхности подложки, Q – количество испаряемого вещества, h – расстояние от источника испарения до любой точки по плоскости конденсата, коэффициент $\alpha =$

x/h , где x – расстояние от точки, находящейся непосредственно под испарителем, до какой-либо точки на плоскости подложки. Толщина пленок, полученных вакуумным испарением, вычислялась по формуле

$$H = \frac{q}{\rho} \quad (2),$$

где ρ – плотность вещества. Кроме того, толщина пленок контролировалась спектрометром «Spekor-250», а состав – атомно-абсорбционным спектрофотометром «Shimadzu AA-6300».

Кинетика кристаллизации аморфных пленок $\text{TlIn}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}_2$ исследована на электронографе марки ЭМР-102 с использованием энергетического фильтра для отсева неупруго рассеянных электронов и электрической регистрации интенсивностей дифракционных линий, возникающих в результате кристаллизации аморфной фазы. При электрической регистрации интенсивности выбранной линии кристаллической фазы размер щели электронного датчика интенсивности определялся из соотношения $2/3d=l$, где d – ширина щели, l – полуширина регистрируемой линии. Регулировкой усиления сигнала можно добиться максимального уровня записи интенсивности выбранной линии. На этом уровне записи исследуемая пленка нагревается при постоянной температуре в области фазового превращения, т.е. кристаллизации. Температура кристаллизации аморфных пленок $\text{TlIn}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}_2$ составляла $420 \text{ K} \div 480 \text{ K}$. Термообработка аморфных пленок при указанной температуре приводит к тому, что начинается фазовое превращение. Исследуемая пленка, оказавшись в своеобразной углеродной капсуле, полностью застраховалась от окисления и реиспарения при переносе в колонну электронографа и дальнейшей термообработке. Следует отметить высокое качество электронограмм, полученных от пленок, осажденных на подложку KCl. Но не все полученные образцы оказались пригодны для исследования, так как шероховатость подложек на атомарном уровне и напряжение на границе раздела пленка – подложка оказывают разрушительное воздействие на пленки во время их отделения от подложек, что подтверждается в [13].

Кинематические электронограммы, в которых прослеживается изотермическое фазовое превращение, т.е. наблюдаются изменения количества и интенсивностей линий растущей кристаллической фазы, соответствующие различным моментам времени, получены при температурах 420, 450 и 480 K.

Результаты и их обсуждение

Из полученных путем изменения фазового состава пленок $\text{TlIn}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}_2$ ($x=0.02 \div 0.09$) для исследования были выбраны пленки $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$. На кинематической электронограмме, полученной при 450 K (рис. 1), показывающей процесс фазового превращения, в начале

наблюдаются три диффузные линии: $S=4\pi\sin\theta/\lambda = 0.212; 0.349; 0.519 \text{ нм}^{-1}$. Пороговая температура, при которой происходила мгновенная кристаллизация аморфной плёнки, не позволяющая проследить всю динамику процесса фазового превращения, составляла 483 К. Дифракционные линии от поликристалла на кинематической электронограмме индицируются на основе параметров тетрагональной ячейки TlInSe_2 со значениями $a = b = 0.8075$, $c = 0.6847 \text{ нм}$ [12].

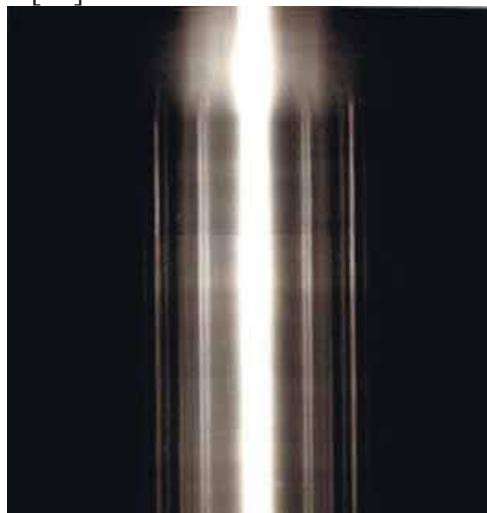


Рис.1 . Кинематическая электронограмма показывающая кристаллизацию $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$ при температуре 450К.

Для интерпретации электронограмм проводятся измерения интенсивности, радиуса рефлексов и т.д. Как известно [10], интенсивность линий I_{hkl} связана с облучаемым объемом кристаллического вещества соотношением

$$I_{hkl} = I_0 \lambda \left| \frac{\Phi_{hkl}}{\Omega} \right|^2 V \frac{d_{hkl}^2 \Delta}{4\pi L \lambda} P \quad (3).$$

Здесь I_0 – интенсивность первичного пучка излучения, λ – длина электронной волны, Φ – структурная амплитуда дифракционного отражения, которая в кинематическом приближении вычисляется из атомных факторов рассеяния, Ω – объем элементарной ячейки, V – облучаемый объем поликристаллического препарата. Параметры d_{hkl} и Δ показывают межплоскостное расстояние и малый участок дебаевского кольца, P – фактор повторяемости усиления дифракционного рефлекса, $L\lambda$ – постоянная прибора, которая определяется в зависимости от приложенного напряжения ускоряющего электронов.

Измерения дифракционных линий на электронограмме показали, что процесс кристаллизации аморфной пленки происходит закономерно, т. е. $I_{hkl} \sim V$. Посредством микрофотометра МФ-4 также определили ширину и интенсивности линий от различных участков кинематической электроно-

граммы (рис.2).

Температурно-временные зависимости кристаллизации были построены с учетом изменения интенсивностей дифракционных линий растущей кристаллической фазы, соответствующих различным моментом отжига (рис.3). Полученные изотермы были сопоставлены с аналитическим выражением (4) для кинетических кривых фазовых превращений:

$$V_t = V_0[1 - \exp(-kt^m)] \quad (4).$$

Здесь V_t – закристаллизовавшийся объем в данный момент времени t ; V_0 – объем аморфной фазы в начале процесса; $k=1/3\pi\omega c^3$ – константа скорости реакции; ω – скорость образования зародышей новой фазы в единице непревращенного объема; c – линейная скорость роста кристалликов; m – параметр, характеризующий мерность роста кристалликов, который в рассматриваемом случае оказался равным приблизительно трем ($m \sim 3$). Это свидетельствует о двумерном росте образующихся зародышей. На основе электрической регистрации по интенсивностям (t, I, V_t) рефлексов дифракционной картины, построили график зависимости $\ln \ln V_0/V_0 - V_t$ от $\ln t$ для температур 420, 450 и 480К (рис.4), которые описывается аналитическим выражением (4). По наклону зависимостей $\ln k$ от обратной температуры $10^3/T$ (рис.5), определены значения суммарной энергии активации процесса кристаллизации, которые оказались равными $E_{\text{общ}} = 48.85$ ккал/моль. Также были определены величины энергии активации зародышеобразования E_z и энергии активации дальнейшего их роста E_p , которые приведены в таблице.

Таблица

Соединения	m	Энергия активации		
		$E_{\text{общ}}$ (ккал/моль)	E_p (ккал/моль)	E_z (ккал/моль)
TlInSe_2	3	45.74	14.71	16.32
$\text{TlIn}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}_2$	3	48.85	15.69	17.47

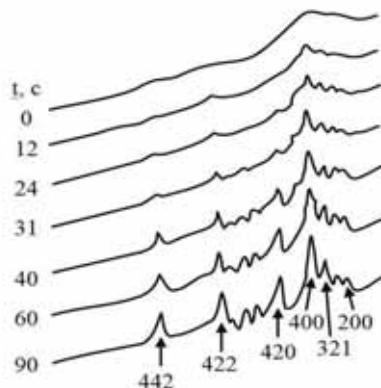


Рис.2. Микрофотограммы от различных участков кинематической электронограммы, снятой при 450 К.

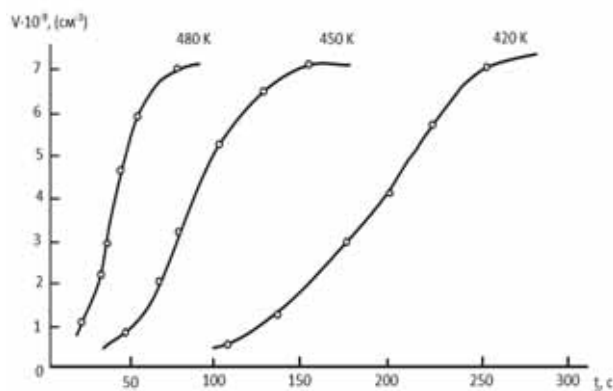


Рис.3. Кинематические кривые кристаллизации аморфного $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$.

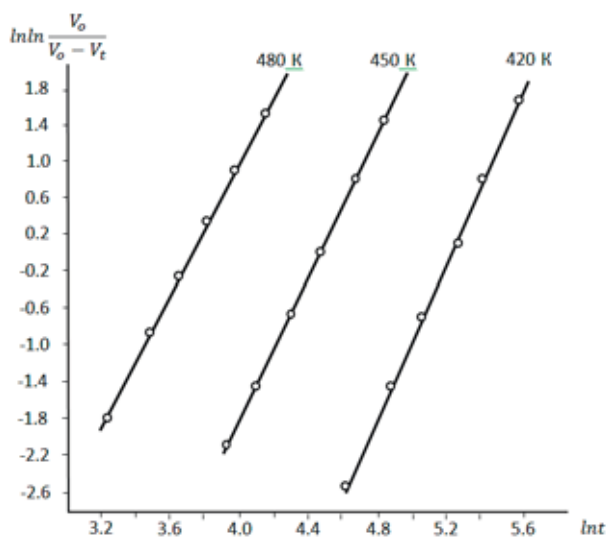


Рис.4. Зависимость $\ln \ln V_0/V_0 - V_t$ от $\ln t$ для кристаллизации аморфного $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$.

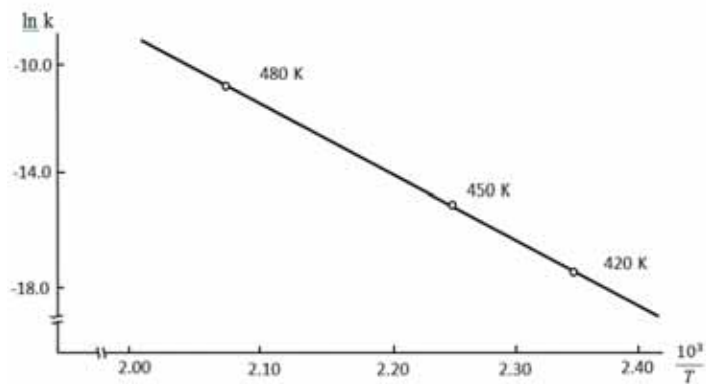


Рис.5. Зависимость $\ln k$ от обратной температуры

для кристаллизации аморфного $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$.

Заключение

В настоящей работе представлены результаты исследования электронографическими методами кинетики кристаллизации тонких аморфных пленок $\text{TlIn}_{0.93}\text{Sn}_{0.07}\text{Se}_2$. Определено, что для этих соединений эффективная энергия активации кристаллизации увеличивается на 6.8 %, т.е. температура кристаллизации аморфных пленок с примесью происходит при более высокой температуре, чем без неё. Обнаружено увеличение диапазона температур кристаллизации аморфных пленок до 60°C . Установлено, что в процессе фазового перехода в исследуемом интервале температур имеет место двухмерный рост кристалликов. В кристаллических пленках, полученных после фазового перехода, параметры решётки элементарных ячеек увеличиваются соответственно сингониям в указанном составе (при $x=0.07$) на 3.5 %. Изменение параметров решётки в зависимости от состава непрямолинейно. При легировании TlInSe_2 примесью Sn обнаруживаемое возрастание энергии активации и параметров решётки при неизменной пространственной группе симметрии с учетом физических свойств олова следует считать закономерным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovanda V., Vicek Mir, Jain H. // J. Non-Cryst. Solids. 2003. V.326. P.88.
2. Пашаев А.М., Джафаров Т.Д. // Физические основы нанoeлектроники. Баку, 2014, 88 с.
3. Kavetskyu T.S., Shpotyuk O.I., Boyko V.T. // J. Phys. and Chem. Of solids. 2007, v.68. p.712.
4. Филачев А.М., Таубкин И.И., Тришенков М.А. // Твердотельная фотоэлектроника. М.:Физматкнига, 2012, 363 с.
5. Sanghera J.S., Aggarwal I.D., Shaw L.B., Florea C.M. et. al. // J. Optoelektroniks and Advancedmaterials. 2006, v.8, p.2148.
6. Мальсагов Ах.У. Обзор литературы по полупроводниковым соединениям типа $\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}_2^{\text{IV}}$, $\text{TlB}^{\text{III}}\text{C}_2^{\text{VI}}$. Нальчик: ЭЛЬ-ФА, 2007, 692 с.
7. Kovanda V., Vicek Mir, Jain H. // J. Non-Cryst. Solids. 2003, v.326, p.88.
8. Сардарлы Р.М., Самедов О.А., Абдуллаев А.П., Салманов Ф.Т. и др. //ФТП, 2011, т.45, в. 11, с. 1441
9. Алиев Ф.И., Исмаилов Д.И., Алекперов Э.Ш. ДАН Азерб. Рес. 1989, №11-12, т.45, с.27-29
10. Авилов А.С. // Прецизионная электронография. Дис. док. физ.-мат. наук: 01.04.18. М., 1999, 274 с.
11. Ismailov D.I., Aliyeva M.F., Alekperov E.Sh., Aliyev F.I. // Semiconductors. 2003, v.37, №7, p.744
12. Muller D., Eulenberger G., Hahn H.Z. Anorg. Allg. Chem., **398**, 207 (1973)
13. Волькенштейн Ф.Ф. Электронные процессы на поверхности полупроводников при хемосорбции. М.: Наука, 1987, 431 с.

QALAYLA AŞQARLANMIŞ $TlInSe_2$ AMORF NAZİK TƏBƏQƏLƏRİNİN TERMİK EMALI ZAMANI FAZA KEÇİDİ

M.M.PƏNAHOV, E.Ş.ƏLƏKBƏROV, E.S.QARAYEV, S.Ə.SƏDRƏDDİNOV,
A.M.NƏZƏROV, S.S.FƏRZƏLİYEV

XÜLASƏ

Yüksək enerjili elektronların difraksiyası üsulu ilə qalay aşqarıyla legirə olunmuş $TlInSe_2$ amorf nazik təbəqəsinin kristallaşma prosesi tədqiq edilmişdir. Yüksək vakuumda termik üsul ilə 30 nm qalınlıqda alınmış amorf nazik təbəqəsinin kristallaşması, Avraami-Kolmogorovun müəyyən etdiyi qanunauyğunluqla baş verir və $V_t = V_0[1 - \exp(-kt^m)]$ analitik tənliyi ilə izah edildiyi göstərilir. $TlIn_{1-x}Sn_xSe_2$ nazik təbəqəsinin kinematik elektronqrammalarına istinadən müəyyən edilmişdir ki, qalay aşqarı sözü gedən nazik təbəqədə kristallaşma mərkəzlərinin yaranmasının aktivləşmə enerjisinə və sonra onların böyümə enerjisinin ədədi qiymətinə təsir edir.

Açar sözlər: elektronografiya, legirə, quruluş, amorf faza, kinetika, kristallaşma

PHASE TRANSITION DURING HEAT TREATMENT OF AMORPHOUS $TlInS_2$ FILMS DOPED WITH TIN

M.M.PANAHOV, E.Sh.ALEKPEROV, E.S.GARAYEV, S.A.SADRADDINOV,
A.M.NAZAROV, S.S.FARZALIYEV

SUMMARY

The process of crystallization of amorphous $TlInSe_2$ films doped with Sn impurities was studied by kinematic electron diffraction. It is shown that the crystallization of amorphous films 30 nm thick obtained in a high vacuum by the thermal method is described by the analytical expression Avraami-Kolmogorov $V_t = V_0 [1 - \exp(-kt^m)]$. The kinematic electron diffraction patterns of $TlIn_{1-x}Sn_xSe_2$ films determine the effect of tin impurities on the growth dimensionality, the activation energy of crystallization activation of amorphous films, and the lattice parameters of elementary cells of crystallized films.

Keywords: electron diffraction, alloying, structure, amorphous, kinetics, crystallization

УДК 539.21

PACS 68.65.Cd, 73.50.Bk

**ЭФФЕКТ МАДЖИ-РИГИ-ЛЕДЮКА В КВАЗИДВУМЕРНОМ
ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ ПРИ РАССЕЯНИИ
НА КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩЕМ ПОТЕНЦИАЛЕ****С.Р.ФИГАРОВА, Г.И.ГУСЕЙНОВ¹, М.М.МАХМУДОВ***Бакинский Государственный Университет**¹Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства
sophiafigarova@gmail.com*

В работе изучается эффект Маджи-Риги-Ледюка в сверхрешетках с косинусоидальным законом дисперсии в поперечном магнитном поле. Рассмотрен вырожденный квазидвумерный и квазитрехмерный электронный газ при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси. Показано, что в слабом магнитном поле коэффициент Маджи-Риги-Ледюка уменьшается с полем, а в сильном магнитном поле электронная часть теплопроводности может менять свой знак в зависимости от параметров сверхрешетки.

Ключевые слова: сверхрешетка, квазидвумерный и квазитрехмерный электронный газ, электронная часть теплопроводности, сильно экранированные ионы примеси.

Терромагнитные явления, такие как поперечный и продольный эффекты Нернста-Эттингсгаузена, электронная часть теплопроводности в магнитном поле (эффект Маджи-Риги-Ледюка) в различных низкоразмерных электронных системах в последние годы интенсивно исследуются [1–7]. Причиной этого является то, что терромагнитные эффекты, в отличие от других кинетических явлений, более чувствительны к механизмам рассеяния, температуре, магнитному полю и размерности электронного газа и дают ценную информацию об энергетическом спектре, механизмах рассеяния в анизотропных низкоразмерных системах. Кроме того, в низкоразмерных электронных системах, а особенно, в сверхрешетках наблюдаются интересные явления, которые не характерны для трехмерного кристалла. Примером этому являются осцилляции, смену знака продольного и поперечного эффекта Нернста-Эттингсгаузена [4-6,8]. Зависимости терромагнитных коэффициентов в магнитных полях от периода сверхрешетки посвящена работа [9], от температуры [10-12]. Анизотропия электронной части теплопроводности в квазидвумерных элек-

тронных системах при отсутствии магнитного поля изучена в работе [13], а в поперечном магнитном поле в работе [14]. В перечисленных выше работах мало изучена теплопроводность в сверхрешетках, которая важна с точки зрения создания термоэлектрических преобразователей с высокой добротностью, сильно зависящей от теплопроводности материала, а также их применения в нанoeлектронике.

В сверхрешетках электронный газ может быть либо квазидвумерным, либо квазитрехмерным электронным системам в зависимости от топологии Ферми поверхности. При наличии внешнего магнитного поля динамика движения электронов сильно меняется в зависимости от направления магнитного поля. Изменение динамики электронов приводит к изменению электронной части теплопроводности. Поэтому следует рассмотреть теплопроводность квазидвумерного электронного газа в магнитном поле, т.е. изучать эффект Маджи-Риги-Ледюка для квазидвумерного электронного газа. Отметим, что зависимость теплопроводности от физических параметров определяется, в основном, механизмом рассеяния. При низких, гелиевых температурах доминирующим механизмом является рассеяния на ионах примеси. В работе исследуется эффект Маджи-Риги-Ледюка в перпендикулярном плоскости слоя магнитном поле при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси. Рассмотрен вырожденный электронный газ. Получено, что в слабых магнитных полях коэффициент Маджи-Риги-Ледюка уменьшается с полем. В сильных магнитных полях при определенном соотношении между энергетическими параметрами $k_0 T$ и ε_0 в квазидвумерном случае электронная часть теплопроводности может равняться нулю, что позволяет экспериментально определить фононную часть теплопроводности.

Общий вид электронной части теплопроводности в поперечном магнитном поле.

В данной работе рассматривается квазидвумерный электронный газ с косинусоидальным законом дисперсии:

$$\varepsilon = \varepsilon(k_{\perp}) + \varepsilon(k_z) = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp}} + \varepsilon_0 [1 - \cos(ak_z)], \quad (1)$$

где k_{\perp} - поперечная, k_z - продольная компоненты волнового вектора электрона, $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$, $m_{\perp} = m_x = m_y$ - эффективная масса электронов проводимости в плоскости слоя сверхрешетки, ε_0 - полуширина одномерной минизоны проводимости, \hbar - постоянная Планка, a - постоянная сверхрешетки. В работе рассматривается рассеяние на сильно экранированных ионах примеси. Следует отметить, что при рассеянии электронов проводимости на сильно экранированных ионах примеси и дефектах используется короткодействующий потенциал и в этом случае обратное время релаксации изотропно и равна [10]:

$$\frac{1}{\tau_{||}} = \frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{1}{\tau_0} 2k_z r_0, \quad (2)$$

здесь $\tau_0 = (m_{\perp} \chi)^{1/2} / 8\pi N_i e a^{3/2}$, χ - диэлектрическая проницаемость, k_0 - постоянная Больцмана, e - заряд электрона, N_i - концентрация примеси.

При получении этого выражения использовалось борновское приближении, в которых соблюдается условия $r_0 \ll r_B$ (где $r_B = \chi \hbar^2 / m e^2$ - эффективный боровский радиус).

Геометрия задачи выбирается в виде: $\Delta T = \Delta T_x$, $\Delta T_y = \Delta T_z = 0$, $B = B_{\perp} = B_z$, т.е. градиент температуры находится в плоскости слоя, а магнитное поле по оси сверхрешетки. Используя квазиклассическое приближении ($\varepsilon_0 \gg \hbar/\tau$) для коэффициент Маджи-Риги-Ледюка, который определяется из следующих условий $\nabla_x T \neq 0$, $\nabla_y T = 0$, $j_x = j_y = 0$ [11] получим:

$$\kappa(B) = -\frac{w_x}{\nabla_x T} = \kappa_{11} - T\beta_{11}\alpha(B) - T\beta_{12}Q, \quad (3)$$

где β_{ik} и κ_{ik} в перпендикулярном магнитном поле для квазидвумерного электронного газа принимают вид:

$$\beta_{ik} = \frac{n_0 e}{T} \left\langle (\varepsilon - \zeta) \frac{\tau_{\perp} v_{\perp}^{(i-k)}}{1 + v_{\perp}^2} \right\rangle, \quad (4)$$

$$\kappa_{ik} = \frac{n_0}{T} \left\langle (\varepsilon - \zeta)^2 \frac{\tau_{\perp} v_{\perp}^{(i-k)}}{1 + v_{\perp}^2} \right\rangle, \quad (5)$$

здесь усреднение $\langle \dots \rangle$ означает

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\pi^2 \hbar^2 n_0 a} \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) A \varepsilon_{\perp} d\varepsilon_{\perp} dZ, \quad (6)$$

где $v_{\perp} = \Omega_{\perp} \tau_{\perp} = \frac{eB}{m_{\perp}} \tau_0 \left(\frac{a}{2r_0} \right) \frac{1}{Z} = \Omega_{\perp} \tau_0 \left(\frac{a}{2r_0} \right) \cdot \frac{1}{Z}$, $v_{\perp 0} = \Omega_{\perp} \tau_0$

Общие выражения для продольного $\alpha(B)$ и поперечного $Q(B)$ коэффициентов получены в работах [5,9,12].

Аналитическое выражение для коэффициента Маджи-Риги-Ледюка при произвольном вырождении электронного газа невозможно получить. Рассмотрим вырожденный квазидвумерный электронный газ и приведем выражения для компонент тензора теплопроводности κ_{ij} :

$$\kappa_{xx} = \kappa_0 \frac{m_{\perp} \varepsilon_0}{\pi^2 \hbar^2 a n_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right) \int_0^{Z_0} \frac{1}{Z} \frac{(\cos Z - \cos Z_0)}{Z^2 \left[1 + v_{\perp 0}^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \right]}, \quad (7)$$

$$\kappa_{xy} = \kappa_0 \frac{m_{\perp} \varepsilon_0}{\pi^2 \hbar^2 a n_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right) v_{\perp 0} \int_0^{Z_0} \frac{1}{Z^2} \frac{(\cos Z - \cos Z_0) dZ}{Z^2 \left[1 + v_{\perp 0}^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \right]}, \quad (8)$$

здесь $\kappa_0 = \frac{\pi^2}{3} \sigma_0 \left(\frac{\kappa_0}{e} \right)^2 T$ - электронная теплопроводности трехмерного

электронного газа в отсутствии магнитного поля, Z_0 - степень заполнения минизоны сверхрешетки, которая: для квазидвумерного электронного газа ($\varepsilon_F > 2\varepsilon_0$): $Z_0 = \pi$, а для квазитрехмерного ($\varepsilon_F < 2\varepsilon_0$): $Z_0 = \arccos(1 - \varepsilon_F/\varepsilon_0)$. Степень заполнения минизоны Z_0 -определяется топологией поверхности Ферми, в случае квазидвумерного электронного газа поверхность Ферми имеет вид гофрированного цилиндра, а в квазитрехмерном - эллипсоида.

Теперь подставляя выражения $\beta_{ik}, \kappa_{ik}, \alpha(B), Q(B)$, для вырожденного квазидвумерного электронного газа в формулу (3) можно найти коэффициент Маджи-Риги-Ледюка. Так как это выражение при произвольном значении магнитного поля и размерности электронного газа очень громоздки, ограничимся предельными случаями по магнитному поля и размерности электронного газа.

1. Слабое магнитное поле: $v_0 = \Omega \tau_0 \ll 1$.

С учетом этого условия для коэффициента Маджи-Риги-Ледюка в слабом магнитном поле получим:

$$\kappa(B) = \kappa_f + \kappa(0) - \sigma_0 \left(\frac{k_0}{e} \right)^2 \cdot T (\Omega \tau_0)^2 L \left(\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0 \right), \quad (9)$$

$$\kappa(0) = \sigma_0 \left(\frac{\kappa_0}{e} \right)^2 \cdot T \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{m_{\perp} \varepsilon_0}{\pi^2 \hbar^2 a n_0} \cdot \frac{a}{2r_0} \left[1 - \left(\frac{\kappa_0 T}{\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{I_{-1,0,0}^2}{I_{-1,0,1}^2} \right] I_{-1,0,1}, \quad (10)$$

$\kappa(0)$ - электронная части теплопроводности сверхрешетки в отсутствии магнитного поля [13], $L \left(\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0 \right)$ - функция, зависящая от безразмер-

ных параметров $\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0$, имеет вид:

$$L\left(\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0\right) = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{a}{2r_0}\right)^3 I_{-3,0,1} \times \left[\frac{I_{-2,0,0}}{I_{-1,0,1}} \cdot 2 \frac{I_{-1,0,0} I_{-2,0,1}}{I_{-1,0,1}^2} + \frac{I_{-1,0,0}}{I_{-2,0,0}} \left(\frac{I_{-2,0,1}}{I_{-1,0,1}} \cdot \frac{I_{-1,0,0}}{I_{-1,0,1}} + 2 \frac{I_{-3,0,0}}{I_{-1,0,1}} - \frac{I_{-3,0,1}}{I_{-1,0,1}} \cdot \frac{I_{-1,0,0}}{I_{-1,0,1}} \right) \right], \quad (11)$$

где $I_{k,l,m} = \int_0^{Z_0} Z^k \cos^l Z (\cos Z - \cos Z_0) dZ$

Из анализа формул (10) и (11) следует, что коэффициент Маджи-Риги-Ледюка в слабых полях уменьшается за счет уменьшения длины свободного пробега в магнитном поле. Коэффициент Маджи-Риги-Ледюка сверхрешеток в слабом магнитном поле существенно зависит от параметра $\frac{k_0 T}{\varepsilon_0}$, размерности электронного газа Z_0 и соотношения между a постоянной сверхрешетки и r_0 радиусом экранирования

$\frac{a}{r_0}$. В квазидвумерном случае, так как время релаксации не зависит от энергии, коэффициент Нернста-Эттингсгаузена становится равным нулю $Q = 0$.

2. *Сильное магнитное поле:* $\Omega \tau_0 \gg 1$.

В этом случае для коэффициенты Маджи-Риги-Ледюка получим:

$$\kappa(B) = \kappa_f + \kappa_0 \frac{1}{(\Omega \tau_0)^2} L_1\left(\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0\right), \quad (14)$$

где

$$L_1\left(\frac{a}{r_0}, \frac{k_0 T}{\varepsilon_0}, Z_0\right) = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{a}{2r_0}\right)^{-1} \frac{m_{\perp} \varepsilon_0}{\pi^2 \hbar^2 a n_0} I_{1,0,1} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_0 T}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{I_{0,0,0}}{I_{0,0,1}} - \frac{2I_{1,0,0} I_{0,0,1} - I_{1,0,1} I_{0,0,0}}{I_{1,0,1} I_{0,0,1}} \right) \right]. \quad (15)$$

В сильном магнитном поле $\kappa(B) \approx \kappa_f$, т.е. можно определить фоновую часть теплопроводности сверхрешеток. В квазидвумерном случае ($Z_0 = \pi$), из (15) для $\kappa(B)$ получим:

$$\kappa(B) = \kappa_f + \kappa_0 \frac{1}{(\Omega \tau_0)^2} \left(\frac{a}{2r_0}\right)^{-1} \cdot 10 \left[1 - 6 \left(\frac{k_0 T}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]. \quad (16)$$

Из (16) видно, что при $\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\kappa_{el} = 0$ электронная часть теплопроводности равно нулю, при $\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \approx 1$, $\kappa_{el} < 0$, при выполнении условия

$\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} > \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\kappa_{el} < 0$, при $\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} < \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\kappa_{el} > 0$. Следовательно, при низких температурах $k_0 T \ll \varepsilon_0$ электронная часть теплопроводности меняет свой знак.

Заключение. В настоящей работе вычислен коэффициент Маджи-Риги-Ледюка в сверхрешетках с косинусоидальным законом дисперсии в перпендикулярном плоскости слою магнитном поле. Получены аналитические выражения для коэффициента Маджи-Риги-Ледюка при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси. Исследован квазидвумерный и квазитрехмерный вырожденный электронный газ в предельных случаях слабого и сильного магнитного поля. Показано, что коэффициент Маджи-Риги-Ледюка в слабых магнитных полях уменьшается с индукцией магнитного поля. В сильных магнитных полях электронная часть теплопроводности стремится к нулю, коэффициент Маджи-Риги-Ледюка совпадает с фоновой частью теплопроводности, и эта дает возможность экспериментально измерять фоновую часть теплопроводности сверхрешеток. При низких температурах в случае сильного магнитного поля электронная часть теплопроводности меняет свой знак. Кроме того, следует отметить, что коэффициент Маджи-Риги-Ледюка сильно зависит от степени заполнения минизоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flecher R., Magneto thermoelectric effects in semiconductors systems, *Semicond. Sci. Technol.* 1999, 14, R1- R15.
2. Zianni X., Butcher P.N., Kearney M.J. Semiclassical magnetothermopower of a quasi-two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B* 49, 1994, v.11, 7520-7527.
3. Nguyen Ouock Khanh, Vo Van Tai. Transport properties of the two-dimensional electron gas in wide AIP quantum wells: The effects of background charged impurity and acoustic phonon scattering. *Superlattices and Microstructures*. 2016, v.100, XII, 792 -798.
4. Behnia K., Measson M.A., Kopelevich Y. Oscillating Nernst-Ettinghausen effect in bismuth across the quantum limit. *Phys. Rev. left*, 2007, v.98, 166602-1-1666602-4.
5. Figarova S.R., Huseynov H.I., Figarov V.R. Magneto thermoelectric properties of layered structures for ion impurity scattering. *Superlattices and Microstructures*. 2018, v.117, 469-475.
6. Ma R., Shend L. Magnetothermoelectric transport properties in graphene superlattices with one-dimensional periodic potentials. *EPL*. 2015, v.109, no 1, p. 17004.
7. Arpan Kundu, Majed A. Alrefae, Timothy S. Fisher. Magneto thermoelectric effective's in graphene and their dependence on scatteren concentration, magnetic field, and band gap. *Journal of Applied Physics*. 2017, v. 121, p.125113.
8. Kirichenko O.V., Peschansry V.G., Gabbarova O. Electron transport in strongly anisotropic structures in a magnetic field. *Journal of Physical Studies*. 2009, v. 13, № 4, p. 2704-1-2704-5.
9. Figarova S.R., Huseynov H.I., Figarov V.R. Anisotropy of Nernst-Ettingshauzen Effect in Superlattices During scattering on Phonons. *Russian Physics Journal*. 2018, v.60, № 11, p.1931-1937.
10. Аскеров Б.М., Гусейнов Г.И., Фигаров В.Р., Фигарова С.Р. Анизотропия примесного

- рассеяния и электропроводности квазидвумерных электронных систем. ФТТ, 2008, т.50, с. 746-750.
11. Askerov B.M., Figarova S.R. Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. Berlin: Springer Verlag, 2010, 374 p.
 12. Figarova S.R., Huseynov H.I., Figarov V.R. Transverse Nernst-Ettingshauzen Effect in Superlattices Upon Electron-Phonon Scattering. Semiconductors. 2018, v.52, № 7, p.853-858.
 13. Фигарова С.Р., Гусейнов Г.И. Электронная часть теплопроводности сверхрешеток при рассеянии на ионах примеси. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. 2016, №1, p.113-119.
 14. Гусейнов Г.И. Эффект Маджи-Риги-Ледюка в сверхрешетках при рассеянии на акустических фононах. Известия НАНА, серия физико-математических и технических наук, 2020, т.40, № 2, с.60-65.

KVAZIİKIÖLÇÜLÜ ELEKTRON QAZINDA QISATƏSİRLİ POTENSİALDAN SƏPİLMƏ HALINDA MACİ-RİQİ-LEDYUK EFFEKTİ

S.R.FİQAROVA, H.İ.HUSEYNOV, M.M.MAHMUDOV

XÜLASƏ

İşdə kosinusoidal dispersiya qanununa tabe olan ifratqəfəslərdə eninə maqnit sahəsində Macı-Riqi-Ledyuk effekti öyrənilir. Güclü ekranlaşmış aşqar ionlarından səpilmə halında kvaziikiölçülü və kvaziüçölçülü cırlaşmış elektron qazı nəzərdən keçirilir. Göstərilmişdir ki, Macı-Riqi-Ledyuk əmsalı zəif maqnit sahəsində sahənin qiymətindən asılı olaraq azalır. Tapılmışdır ki, güclü maqnit sahəsində istilikkeçirmənin elektron hissəsi ifratqəfəs parametrlərindən asılı olaraq öz işarəsini dəyişir.

Açar sözlər: ifratqəfəslər, kvaziikiölçülü və kvaziüçölçülü elektron qazı, istilikkeçirmənin elektron hissəsi, güclü ekranlaşmış aşqar ionları.

MAGGI-RIGHI-LEDUC EFFECT IN QUASI-TWO-DIMENSIONAL ELECTRON GAS AT SCATTERING ON SHORT-RANGE POTENTIAL

S.R.FIGAROVA, H.I.HUSEYNOV, M.M.MAHMUDOV

SUMMARY

The work investigates the Maggi-Righi-Leduc effect in superlattices with the cosine dispersion law in the magnetic field perpendicular to the layer plane. A degenerate quasi-two-dimensional and quasi-three-dimensional electron gas on scattering by strongly screened impurity ions is considered. It is shown that in a weak magnetic field the Maggi-Righi-Leduc coefficient decreases with the field, and in a strong magnetic field the electron part of the thermal conductivity can change its sign depending on the parameters of the superlattice.

Key words: superlattice, quasi-two-dimensional and quasi-three-dimensional electron gas, electron part of thermal conductivity, strongly screened impurity ions.

UOT 533.951.537.52

**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
НА ПРОБОЙ ГАЗА В ДЛИННЫХ ТРУБКАХ****Г.М.САДЫХ-ЗАДЕ, М.Н.АГАЕВ, Х.А.ГАСИМЛИ**
Бакинский Государственный Университет
gulara.sadiqzade@gmail.com, agayevm50@mail.ru

В данной работе изучено влияние магнитной индукции на распространение волны ионизации. Показано, что изменение распределенной емкости по длине трубки не оказывает существенного влияния на скорость фронта ионизации, если первоначальные емкости C_0 , с которых стартует волна, имеют одно и те же значение. При этом имелось в виду, что емкость вдоль трубки или равномерно увеличивается, или равномерно уменьшается. Установлено, что при всех исследованных разрядных условиях скорость фронта не зависит от величины индукции магнитного поля.

Ключевые слова: пробой газа, продольное магнитное поле, волна ионизации, скорость фронта ионизации.

Впервые влияние однородного магнитного поля на процесс развития разряда в длинной трубке исследовалось авторами работ [1, 2]. Эксперименты [1,3] проводились в инертных газах Ar и He при наличии предварительной ионизации и давлениях от 0,2 до 9 Тор. При подаче между поджигающим электродом (п.э.) и обкладками в виде колец, создающими равномерно распределенную емкость, синусоидального напряжения $U(t)$ пробой газа в течение каждого периода колебаний осуществлялся дважды: как на участке возрастания $U(t)$, когда происходила зарядка стенки, так и при убывании $U(t)$, сопровождающемся разрядкой стенки.

В настоящей работе приводятся результаты проведенного экспериментального исследования воздействия магнитного поля на развитие разряда в длинной трубке с переменной распределенной емкостью. Рассмотрено, какие изменения вносит внешнее продольное магнитное поле в основные характеристики исследуемого разряда.

Экспериментальная установка и методика измерений. Эксперимент проводится в стеклянной газоразрядной трубке, длина которой 0,8 м, а внутренний диаметр 0,32 м. Газоразрядная трубка заполняется арго-

ном до давления $P = 1,2$ Тор. Аргон выбирался как наиболее часто используемый в люминесцентных лампах, моделью которых являлась наша газоразрядная трубка. По всей длине трубки расположены обкладки из алюминиевой фольги. Ширина этих обкладок составляет $3 \cdot 10^{-2}$ м, а расстояние между ними 10^{-2} м. Первые три кольца надеты непосредственно на трубку, а между остальными обкладками и трубкой имеются диэлектрические прокладки, толщина которых меняется от $2 \cdot 10^{-4}$ до $1,0 \cdot 10^{-8}$ м. Это сделано для того, чтобы по мере удаления обкладок от поджигающего электрода, емкость обкладок уменьшалась. Разница между емкостью первой обкладки и последней составляет ~ 20 раз. Эти обкладки образуют вдоль трубки емкость $C_1 \div C_{12}$. Соответственно условия у ПЭ, с которых начинала свое движение волна, существенно различались.

Обкладки соединялись с общей заземленной шиной через зарядное сопротивление $R = 5$ кОм, смонтированное на штекерных гнездах таким образом, что при подключении любого из них ко входу осциллографа С8 – 2 остальные кольца оставались замкнутыми накоротко. Ждущая развертка осциллографа запускалась от генератора или первого от ПЭ кольца. Обкладки последовательно подключались к входу осциллографа. По величине импульсов тока в цепи определялся заряд q_0 , приходящий на единицу длины. Для регистрации свечения использовался фотоумножитель типа ФЭУ – 19 со светопроводом, свободно перемещающийся вдоль трубки. Скорость фронта определялась по запаздыванию как импульсов тока с обкладок, так и световых импульсов с ФЭУ. При этом получены одинаковые результаты.

Схема экспериментальной установки представлена на рис 1.

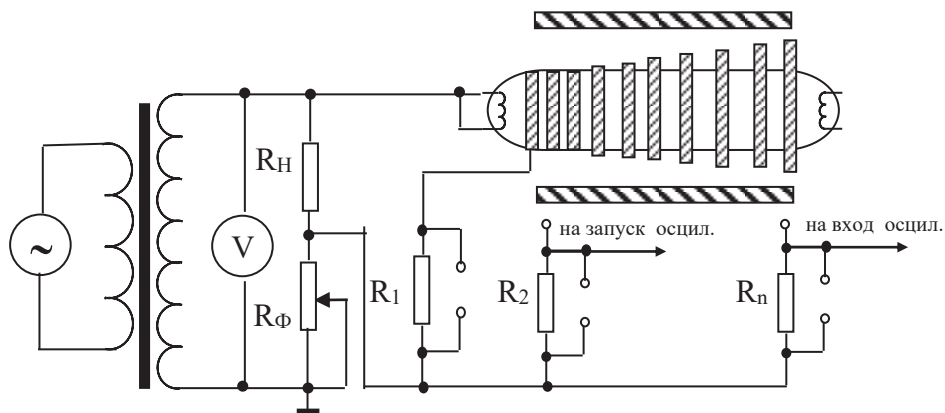


Рис.1. Схема экспериментальной установки.

Исследовалась волна ионизации, распространяющаяся как в сторону увеличения C_0 , так и в сторону её уменьшения, в зависимости от

того, на какой из электродов подается питающее напряжение.

Результаты измерений. Многочисленные измерения показали, что так же, как это впервые было вначале установлено для «медленных» волн в трубках с постоянной C_0 [1], а затем и для «высокоскоростных» волн ионизации [3], скорость ν распространения фронта ионизации вдоль трубки с переменной погонной емкостью не зависит от индукции магнитного поля B . Этот факт характерен и для случая, когда волна распространяется в сторону уменьшения значения емкости C_0 , и при движении в сторону ее увеличения, независимо от начальных условий.

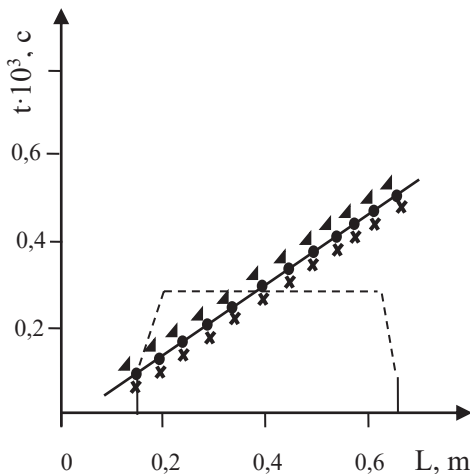


Рис. 2. Зависимость времени перемещения фронта ионизации от расстояния до п.э.

Рассмотрено, какие изменения вносит внешнее продольное магнитное поле в основные характеристики исследуемого разряда.

Подобная картина наблюдалась и в обратном направлении распространения фронта ионизации, хотя в случае, когда разряд развивался в сторону увеличения емкости и стартовал с минимальной C_0 , численные значения скорости были выше.

Для того, чтобы исследовать воздействие неоднородного магнитного поля на скорость фронта, были проделаны специальные измерения скорости фронта по времени сдвига импульса в цепи обкладок, когда часть их попадала в область неоднородности магнитного поля на выходе из соленоида. Для этого соленоид сдвигался относительно трубки, так, чтобы вблизи его торцов располагалось несколько обкладок. Оказалось, что скорость не меняется и при движении фронта через область неоднородного магнитного поля на входе и выходе из соленоида. Результаты этих измерений при давлении 0,27 Тор, параметрах генератора 1000 В и

120 Гц представлены на графике времени прохождения фронта вдоль трубку при различных значениях магнитной индукции \mathbf{B} в области однородного поля внутри соленоида: 0, 360 и 1560 Гс (рис. 2). На этом же рисунке, для наглядности, пунктирной линией показано измеренное распределение индукции магнитного поля вдоль оси внутри соленоида и его расположение относительно разрядной трубки. Видно, что область неоднородности распространяется на расстояние по 8 см внутрь соленоида от его краев, так, что часть обкладок попадает в эту область. Оказалось, что скорость не меняется и при движении фронта через область неоднородного магнитного поля на входе и выходе из соленоида.

Таким образом, неоднородное магнитное поле, так же, как и однородное, не влияет на величину скорости фронта ν , независимо от того, в каких разрядных условиях и при каких режимах происходит его распространение. Остальные закономерности, характерные для скорости волны, распространяющейся в трубке с переменной распределенной емкостью, остаются прежними при наличии магнитного поля: если начальные значения C_0 у п.э. одни и те же, скорость ν не меняется при изменении направления движения волны, т.е. не зависит от того, увеличивается, или уменьшается емкость C_0 по длине. Если же стартовые значения C_0 различны, то скорость ν выше там, где начальная емкость меньше. По длине же трубки скорость фронта не меняется при всех исследованных разрядных условиях.

При анализе вышеизложенных результатов можно сделать следующий вывод о том, что изменение распределенной емкости по длине трубки не оказывает существенного влияния на скорость фронта ионизации, если первоначальные емкости C_0 , с которых стартует волна, имеют одно и те же значение. При этом имелось в виду, что емкость вдоль трубки или равномерно увеличивается, или равномерно уменьшается. Установлено, что при всех исследованных разрядных условиях скорость фронта не зависит от величины индукции магнитного поля.

Основные закономерности, экспериментально установленные в настоящей работе, находят как качественное объяснение в рамках современной теории двумерных ионизирующих солитонов поля, [6] так и оригинальную интерпретацию. Независимость ν и E_0 от магнитного поля связана с пропорциональностью проводимости плазмы за фронтом и зарядом стенок в движущемся фронте ионизации, являющимся единственным источником плазмы [4,5].

В отличие от скорости перемещения фронта ионизации, величина импульсов тока с обкладок шириной в диаметр трубки, надетых вдоль ее длины, существенно меняется в магнитном поле. С увеличением магнитной индукции \mathbf{B} величина импульсов растет за счет увеличения их длительности и некоторого роста амплитуды. В результате плотность заряда,

приходящего на 1 см длины трубки q_0 , определяемая импульсом одной из обкладок, растет с V , причем это характерно как для волны, распространяющейся вдоль трубки с увеличивающейся по длине емкостью C_0 , так и в направлении ее уменьшения. Такая закономерность впервые была отмечена в трубках с постоянной по длине погонной емкостью для «медленных» волн ионизации в [1], а позднее обнаружена и в системах, где фронт распространялся с высокими скоростями [2], хотя там непосредственно измерялся не заряд q_0 , а другая величина - зависимость от времени полного продольного тока $I(t)$, прошедшего через разрядный промежуток.

Зависимости, полученные в настоящем эксперименте для заряда q_0 в трубке с переменной распределенной емкостью показаны на рис.3 и 4. Они сняты при давлении $p = 0,27$ Тор, напряжении 1000 В, частоте питающего напряжения 80 Гц. Основной особенностью в данном случае, в отличие от трубок с постоянной по длине распределенной емкостью, является тот факт, что плотность заряда q_0 не остается постоянной вдоль трубки, как это было в [6,7], а меняется. Поэтому одним из параметров на графиках рис.3 и 4 является расстояние от п.э. до обкладки, с которой снимается импульс: 1 – $L = 0,29$ М; 2 - $L = 0,41$ М; 3 - $L = 0,53$ М. Графики на рис. 3 относятся к случаю волны в трубке с уменьшающейся по длине распределенной емкостью, на рис.4, при тех же параметрах, отличаются направлением движения фронта ионизации. Характер зависимости q_0 от расстояния до п.э. при наличии магнитного поля остается таким же, как и в его отсутствии, т.е. q_0 или падает по длине соответственно уменьшению C_0 , или видно, что q_0 растет, а затем проходит через максимум, если движется вдоль увеличивающейся C_0 .

Следовательно, однородное магнитное поле, не меняя скорости распространения фронта ионизации, заметно увеличивает зарядку распределенной электрической емкости стенки газоразрядной трубки, сопровождающую движение фронта при пробое длинной трубки, причем это характерно для всех исследуемых разрядных условий в трубке с равномерно меняющейся распределенной емкостью.

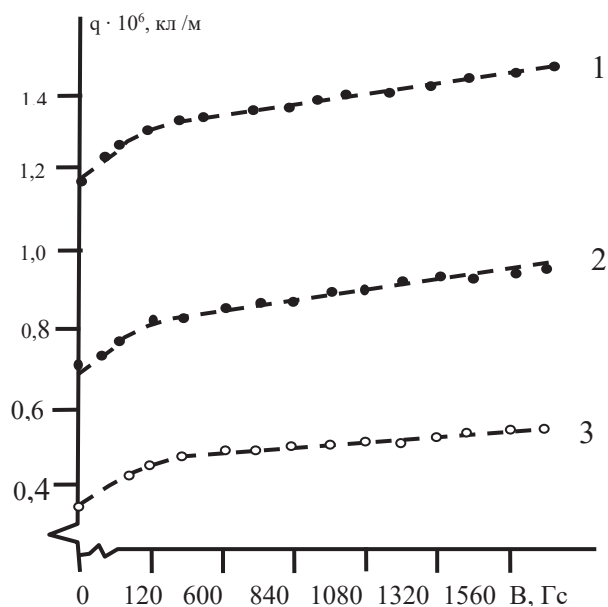


Рис. 3. Зависимость величины заряда, приходящего в импульсе на 1см длины стенки трубки от V . (в случае равномерно уменьшающейся емкости). Аргон.
 $U = 1000 \text{ В}$; $P = 0,27 \text{ Тор}$; $f = 80 \text{ Гц}$. 1 – $L = 0,29 \text{ М}$; 2 – $L = 0,41 \text{ М}$; 3 – $L = 0,53 \text{ М}$

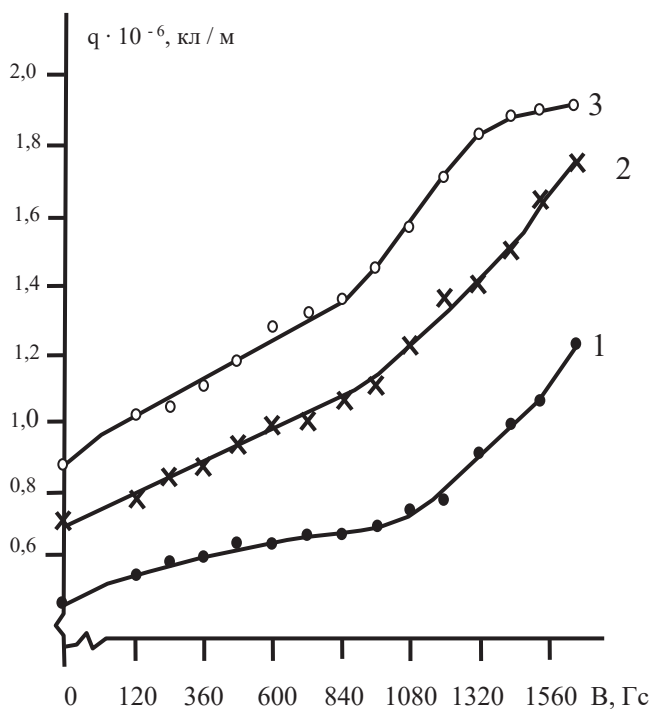


Рис.4. Зависимость величины заряда, приходящего в импульсе на 1см длины стенки трубки от V . (в случае равномерно увеличивающейся ёмкости). Аргон.
 $U = 1000 \text{ В}$; $P = 0,27 \text{ Тор}$; $f = 80 \text{ Гц}$. 1 – $L = 0,29 \text{ М}$; 2 – $L = 0,41 \text{ М}$; 3 – $L = 0,53 \text{ М}$

Обсуждение результатов

Многочисленные измерения показали, что так же, как это впервые было вначале установлено для «медленных» волн в трубках с постоянной C_0 , а затем и для «высокоскоростных» волн ионизации, скорость v распространения фронта ионизации вдоль трубки с переменной погонной емкостью не зависит от индукции магнитного поля B . Этот факт характерен и для случая, когда волна распространяется в сторону уменьшения значения емкости C_0 , и при движении в сторону ее увеличения. Иллюстрацией могут служить данные, представленные на рис.2. Исходя из этого твердо установленного экспериментального факта, можно прийти к заключению, что скорость волны определяется в основном режимом разряда и не меняется при изменении условий её дальнейшего распространения. Таким образом, емкость C_0 , по -видимому, влияет на величину скорости волны только в стадии её формирования. Решающая роль играют условия у п.э. При меньшей первоначальной ёмкости C_0 , когда из – за уменьшения ухода частиц на стенки стартовая плотность плазмы больше, заметно больше скорость фронта v . (неоднородное магнитное поле, так же, как и однородное, не влияет на величину скорости фронта v). Характерные для скорости волны, распространяющейся в трубке с переменной распределенной емкостью зависимости, остаются прежними и при наличии магнитного поля: если начальные значения C_0 у п.э. одни и те же, скорость v не меняется при изменении направления движения волны, т. е. не зависит от того, увеличивается, или уменьшается емкость C_0 по длине. Если же стартовые значения C_0 различны, то скорость v выше там, где начальная ёмкость меньше. По длине же трубки скорость фронта не меняется при всех исследованных разрядных условиях. Однако если изменение значений погонной ёмкости вдоль разрядной трубки не оказывает существенного влияния на основные закономерности пробойной волны в магнитном поле, можно распространить рассуждения, приведенные для волны в трубке с постоянной C_0 и для изучавшегося в данной работе пробоя с изменяющейся по длине распределённой ёмкостью.

Согласно экспериментальным данным продольное магнитное поле в медленной двумерной нелинейной волне ионизации может существенно влиять на размеры зоны ионизации и на плотность электрического заряда стенок трубки.

Из [7] следует, что независимость скорости ионизации от магнитного поля связана с пропорциональностью между проводимостью плазмы за фронтом и зарядом стенок в движущемся фронте ионизации. Концентрация электронов и ионов в плазме за фронтом, как следует из теории, пропорциональна заряжающему стенки току, так как общее число ионов, «рождающихся в единицу времени за счет ионизации, равно суммарному потоку ионов на стенку трубки» [9]. Сказанное справедливо, если дви-

жущейся фронт ионизации является единственным источником плазмы. Проводимость прямо пропорциональна концентрации плазмы и от продольного магнитного поля не зависит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Недоспасов А.В., Садыхзаде Г.М., Эфендиев К.И. Влияние магнитного поля на пробой в длинной разрядной трубке // ТВТ, 1983, т.21, №6, с.1062-1065.
2. Асиновский Э.И., Лагарьков А.Н., Марковец В.В., Руткевич И.М., Ульянов А.М., Филюгин И.В. // ТВТ, 1987, т. 23, № 5, с.842 – 846.
3. Садыхзаде Г. М. «Волна ионизации при пробое длинной трубки в аргоне» Fizikanın müasir problemləri, III Respublika elmi – praktiki konfransının materialları, Bakı, 2009, s.144 – 146.
4. Недоспасов А.В. О некоторых явлениях при зажигании электрических разрядов в длинных трубках // Т.В.Т., 2013, т.51, №4 . с.483 – 487.
5. Недоспасов А.В., Новик А.Е. Скорость распространения фронта ионизации при пробое длинных разрядных трубок // ЖТФ. 1960, т.30, № 11, с. 1329.
6. Лагарьков А. Н., Руткевич И. М., О распространении медленных фронтов ионизации в трубках // Т.В.Т., 1983, т.21, №6, с.1053 – 1057
7. Недоспасов А.В. О влиянии продольного магнитного поля на электрический пробой газа в длинных трубках // Инженерная физика, 2012, с.35 – 38.
8. Недоспасов А.В., Садыхзаде Г.М., Эфендиев К.И. Пробой в длинной трубке в магнитном поле // ТВТ, 1978, т.16, №4, с.673 - 678.
9. Лагарьков А.Н., Руткевич И.М., Движение пробойной волны в газе без предварительной ионизации // Т.В.Т., 1983, v.21, p.433

UZUN BORUDA QAZ ARALIĞININ DEŞİLMƏSİNƏ MAQNİT SAHƏSİNİN TƏSİRİ

G.M.SADIXZADƏ, M.N.AĞAYEV, X.A.QASIMLI

XÜLASƏ

İşdə maqnit induksiyasının ionlaşma dalğasına təsiri öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, əgər başlanğıc C_0 tutumunun eyni olduğu şəraitində dalğa yayılmağa başladıqda, boru boyunca paylanmış tutum ionlaşma dalğasının yayılma sürətinə əhəmiyyətli təsir etmir. Bu zaman nəzərdə tutulur ki, paylanmış tutum boru boyunca müntəzəm olaraq ya artır və ya azalır. Bütün tədqiq olunan boşalma şəraitlərində ionlaşma cəbhəsinin sürətinə maqnit induksiyasının qiymətindən asılı olmaması təstiqlənmişdir.

Açar sözlər: qazın deşilməsi, uzununa maqnit sahəsi, ionlaşma dalğası, ionlaşma dalğasının sürəti.

INFLUENCE OF A MAGNETIC FIELD ON GAS BREAKDOWN IN LONG TUBES

G.M.SADIG-ZADA, M.N.AGAYEV, Kh.A.GASIMLI

SUMMARY

In this paper, the effect of magnetic induction on the propagation of an ionization wave is studied. It is shown that a change in the distributed capacitance along the length of the tube does not significantly affect the speed of the ionization front if the initial capacitances C_0 , from which the wave starts, have the same value. In this case, it was understood that the capacitance along the tube either uniformly increases or decreases uniformly. It is established that under all the studied discharge conditions, the front velocity does not depend on the magnitude of the magnetic field induction.

Key words: gas breakdown, longitudinal magnetic field, ionization wave, velocity of ionization front.

UOT 577.3

β- KAZOMORFİN-4 MOLEKULUNUN FƏZA QURULUŞU**N.A.ƏHMƏDOV, L.N.AGAYEVA, R.M.ABBASLI, L.İ.İSMAYILOVA***Bakı Dövlət Universiteti, Fizika Froblemləri İnstitutu***Namig.49@bk.ru*

Nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə Pro1-Phe2-Pro3-Gly4-NH₂ β-kazomorfin-4 molekulu fəza quruluşu onu əmələ gətirən aminturşu qalıqlarının aşağıenerjili konformasiyaları əsasında tədqiq olunmuşdur. β-kazomorfin-4 molekulu fəza quruluşunu öyrənmək üçün sistemin potensial enerjisi qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin və hidrogen rabitəsi enerjisinin cəmi şəklində seçilmişdir. β-kazomorfin-4 molekulu fəza quruluşunun stabil konformasiyaları yığılı, onların ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri, onları stabiləşdirən aminturşu qalıqları arasındakı daxili qarşılıqlı təsir enerjiləri müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: ekzorfin, kazomorfin, opioid, fəza quruluşu, konformasiya

Qida maddələrindən alınmış bir sıra ekzogen peptidləri opioidəbənzər xassələrə malikdir. İlk dəfə elmə məlum olan ekzorfinlər α-kazeindən və buğda qlütenindən alınmışdır və müəyyən təsirləri öyrənilmişdir. Qida maddələrinin peptid komponentlərinin opioid aktivliyinə malik olmasının kəşfi belə fərziyyə irəli sürməyə əsas verdi ki, bəzi yeməklər mərkəzi əsəb sisteminə opiat dərmanlar kimi təsir göstərməyə qadirdir. Bəzi tədqiqatçılar fərz edirlər ki, insanlar tərəfindən süd və buğda məhsullarının çox istifadə edilməsi onların tərkibində ekzorfinlərin olması nəticəsində olmuşdur. Endogen opioid peptidlərinin və ekzorfinlərin aminturşu qalıqları ardıcılıqlarının müqayisəsi göstərir ki, ekzorfin molekullarının N-tərəf aminturşu qalıqları daha rəngarəngdir. Bu onu göstərir ki, ekzorfinlər opiat reseptorlarının ixtisaslaşdırılmış liqandları deyil və onlar bəzi hallarda müxtəlif mediator və hormonlarla müxtəlif vəziyyətlərdə qarşılıqlı təsirlərdə ola bilərlər. Ekzorfinlərin N- tərəfində ən çox rast gəlinən Tyr-Pro ardıcılığıdır. Endogen opioid peptidlərinin N-tərəfində ən çox rast gəlinən Tyr-Gly-Gly-Phe ardıcılığıdır. Prolin aminturşu qalığının olması molekulu parçalanmaya qarşı daha davamlı edir. Heyvan mənşəli ekzorfinlər arasında ən çox tədqiq olunanı süd zülalının törəmələridir. Ən çox öyrənilənləri inək südünün β-kazeininin hidrolizindən alınan β-kazomorfin-4, -5, -6, -7 –dir.[1-4].

Opioid peptidləri sinfinə aid olan enkefalinlərin, endorfinlərin, endomorfınların, dinorfinlərin, neoendorfinlərin quruluş-funksiya əlaqələrini tədqiq

etmişik, indi isə ekzorfinlər sinfinə daxil olan molekulların quruluş-funksiya əlaqələri tədqiq olunur. Bu tədqiqat işi də əvvəlki tədqiqat işlərimizin davamıdır[5-11].

1.Hesablama metodu

Pro1-Phe2-Pro3-Gly4-NH₂ β-kazomorfin-4 molekulu dörd aminturşu qalığından, 61 atomdan və 13 ikiüzlü fırlanma bucağından ibarətdir. β-kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşunu öyrənmək üçün sistemin potensial enerjisi qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin və hidrogen rabitəsi enerjisinin cəmi şəklində seçilmişdir. Qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisi Lennard-Cons potensialı ilə Momani və Şeraqanın verdiyi parametrlərlə hesablanmışdır. Molekulun konformasiya imkanları su mühitində öyrənilmişdir. Hidrogen rabitəsinin enerjisi Morze potensialı ilə hesablanmışdır. Torsion qarşılıqlı təsir enerjisini hesablamaq üçün potensial funksiyalar, atomlardakı parsial yüklərin qiymətləri, valent bucaqlarının qiymətləri və valent rabitələrinin uzunluqları. Momani və Şeraqanın məqaləsindən götürülmüşdür. İkiüzlü fırlanma bucaqlarının işarələri və qiymətləri beynəlxalq nomenklaturaya uyğundur [12].

Nəzəri konformasiya analizi üsulunda hesablamaların nəticələrinin təhlil etmək üçün hər bir aminturşu qalığının konformasiya halını xarakterizə etmək üçün $X^{n_{ij}}$ işarəsindən istifadə edilir, burada X-aminturşu qalığının əsas zəncirinin formalarını (R,B,L,P), n-ardıcılıqda aminturşu qalığının neçənci yerdə durduğunu, $ij=11,12,13,21$ və s. simvolları aminturşu qalığının yan zəncirinin vəziyyətini (χ_1, χ_2, χ_3) xarakterizə edir. 1-indeksi ikiüzlü fırlanma bucağının qiymətinin 0°-120° intervalında, 2-indeksi 120°- -120° intervalında, 3-indeksi -120°-0° intervalında dəyişdiyini göstərir. Aminturşu qalığının əsas zəncirinin R-oblastında ikiüzlü fırlanma bucaqları φ və ψ -nin qiymətləri -180°-0° intervalında; B-oblastında φ -nin qiyməti -180°-0° intervalında, ψ -nin qiyməti 0°-180° intervalında; L-oblastında φ və ψ -nin qiymətləri 0°-180° intervalında; P-oblastında φ -nin qiyməti 0°-180° intervalında, ψ -nin qiyməti -180°-0° intervalında dəyişir. Əsas zəncirin forması anlayışı aminturşu qalıqlarının əsas zəncirinin ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətlərinin R,B,L,P oblastlarına düşdüyünü müəyyən edir.

Molekulun əsas zənciri e və f şeypi adlanan simvollarla da xarakterizə olunur ki, bunlar da uyğun olaraq $C^{\alpha}_i-C^{\alpha}_{i+1}-C^{\alpha}_{i+2}-C^{\alpha}_{i+3}$ virtual rabitələrinin açılmış və bükülmüş konfigurasiyasına uyğun gəlir. f-şeypini dipeptid fraqmentin R-R, R-B, B-L, L-L, B-P, L-P, P-R, R-B formaları, e-şeypini isə B-B, B-R, L-B, L-P, R-L, R-P, P-L, P-P formaları əmələ gətirir.

2. Hesablamaların nəticələri və onların müzakirəsi

Pro1-Phe2-Pro3-Gly4-NH₂ β-kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşu onu əmələ gətirən uyğun aminturşu qalıqlarının aşağıenerjili konformasiyaları əsasında hesablanmışdır. Məlumdur ki, molekulun aminturşu qalıqları ardıcılığında qlisindən başqa digər aminturşu qalıqları prolin aminturşu qalığından əvvəl gəldikdə onlar üçün əsas zəncirin R formasının konformasiyaları yüksəkenerjili olur. Ona görə də β-kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşunu hesablamaq üçün başlanğıc variantlar seçildikdə Phe2 üçün əsas zəncirin R formasının konformasiyalarına baxılmamışdır. Bu səbəbdən də molekulun fəza quruluşunu öyrənmək üçün başlanğıc variantlar peptid zəncirin eee, eef, fee və fef şeyplərinin əsas zəncirlərinin 16 formasının konformasiyaları əsasında formalaşmışdır.

β-kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsi göstərir ki, əsas zəncirin formalarının və konformasiyaların enerjilərinə görə diferensiasiya gedir. Hesablanmış konformasiyalar arasından əsas zəncirin hər bir formasının ən aşağıenerjili konformasiyası seçilmiş, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, ümumi və nisbi enerjiləri cədvəl 1-də göstərilmişdir. Cədvəl 1-dən görüldüyü kimi, qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisinin ümumi enerjiyə verdiyi pay (-10.3) – (-5.4) kkal/mol, elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (-3.2) – (-2.4) kkal/mol, torsion qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (0.8) - (2.1) kkal/mol intervalında olmuşdur. Cədvəl 1-də göstərilən konformasiyaların nisbi enerjiləri isə 0 - 5.0 kkal/mol enerji intervalında dəyişir.

Cədvəl 1

β-kazomorfin-4 molekulunun aşağıenerjili konformasiyaları, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, ümumi və nisbi enerjiləri

№	Şeyp	Konformasiya	U _{qv}	U _{el}	U _{tor}	U _{üm}	U _{nis}
1	fef	R B ₃ R R	-10.3	-2.7	1.0	-12.0	0
2		R B ₂ B L	-8.9	-3.0	1.5	-10.3	1.7
3		B L ₃ R R	-9.2	-2.6	1.7	-10.1	1.9
4		B L ₂ B L	-7.6	-2.6	1.9	-8.3	3.7
5	fee	R B ₁ R L	-9.4	-2.8	0.8	-11.3	0.7
6		R B ₁ B B	-6.7	-3.1	0.9	-8.9	3.1
7		B L ₃ R L	-7.6	-2.6	1.5	-8.7	3.3
8		B L ₃ B B	-5.4	-3.0	1.4	-7.0	5.0
9	eef	B B ₃ R R	-9.0	-2.8	1.2	-10.6	1.4
10		R L ₃ R R	-10.1	-2.4	2.1	-10.3	1.7
11		B B ₂ B L	-8.5	-2.9	1.5	-9.9	2.1
12		R L ₂ B L	-8.2	-2.5	1.7	-9.0	3.0
13	eee	B B ₁ R L	-7.5	-2.8	0.9	-9.4	2.6
14		R L ₂ R L	-8.1	-2.4	1.5	-9.0	3.0
15		B B ₁ B B	-5.4	-3.2	1.2	-7.4	4.6
16		R L ₃ B B	-6.4	-2.8	1.8	-7.3	4.7

β -kazomorfin-4 molekulunun hər bir şeypinin ən aşağıenerjili konformasiyalarında aminturşu qalıqları daxilində və arasında qarşılıqlı təsir enerjiləri cədvəl 2-də, onların həndəsi parametrləri isə cədvəl 3-də göstərilmişdir.

β -kazomorfin-4 molekulunun ən stabil konformasiyası fef şeypinin R B₃ R R konformasiyasıdır. Bu konformasiyaya qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay ən çoxdur, elektrostatik və torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinə görə isə əlverişlidir (cədvəl 1). Konformasiyanın stabilləşməsinə Pro1-in digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-4.5) kkal/mol, Phe2-nin digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-5.6) kkal/mol, Pro3-ün digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-1.3) kkal/mol pay verir (cədvəl 2). fef şeypinin üç konformasiyasının nisbi enerjisi 2.0 kkal/mol-dan azdır. fee şeypinin ən stabil konformasiyası R B₁ R L –dir, onun nisbi enerjisi 0.7 kkal/mol-dur. Onun stabilləşməsinə Pro1-in digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-6.4) kkal/mol, Phe2-nin digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-5.8) kkal/mol, Pro3-ün digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-1.4) kkal/mol pay verir (cədvəl 2). Bu şeypin digər konformasiyalarının nisbi enerjiləri 3 kkal/mol-dan çoxdur.

Cədvəl 2

β -kazomorfin-4 molekulunun aşağıenerjili R B₃ R R ($U_{nis}=0$ kkal/mol, 1-ci sətir), R B₁ R L ($U_{nis}=0.7$ kkal/mol, 2-ci sətir), B B₃ R R ($U_{nis}=1.4$ kkal/mol, 3-cü sətir) B B₁ R L ($U_{nis}=2.6$ kkal/mol, 4-cü sətir) konformasiyalarında aminturşu qalıqları daxilində və arasında qarşılıqlı təsir enerjiləri

Pro1	Phe2	Pro3	Gly4		
-2.4	-1.4	-0.5	-0.1	Pro1	
-2.1	-3.6	-0.6	-0.1		
-2.4	-2.7	-0.5	-0.1		
-2.1	-4.1	-0.6	-0.2		
	0	-3.7	-1.9	Phe2	
	0.1	-3.7	-1.9		
	0	-3.3	-2.5		
	0	-3.3	-2.4		
			0.3	-1.3	Pro3
			0.3	-1.4	
			0.3	-1.4	
			0.3	-1.4	
			0.7	Gly4	
			0.7		
			0.8		
			0.8		

β -kazomorfin-4 molekulunun aşağıenerjili konformasiyalarının həndəsi parametrləri

Amin turşusu	R B ₃ R R	R B ₁ R L	B B ₃ R R	B B ₁ R L
Pro1	-60 -51 -178	-60 -52 180	-60 137 -177	-60 -132 -178
Phe2	-103 149 177 -62 90	-109 148 177 -59 88	-103 148 177 -63 95	-113 148 .178 60 87
Pro3	-60 -55 177	-60 -57 180	-60 -55 176	-60 -62 180
Gly4	-70 -51 178	67 64 180	-70 -51 179	71 61 179
U _{nis}	0	0.7	1.4	2.6

Qeyd: ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri $\phi, \psi, \omega, \chi_1, \chi_2, \dots$ ardıcılıığı ilə verilmişdir.

Molekula aromatik yan zəncirli Phe aminturşu qalığı daxil olduğundan bir çox konformasiyalarda onun yan zənciri ilə molekulun əsas zəncirinin atomları arasında əlverişli qarşılıqlı təsir yaranır və buna görə də əsas zəncirin bir çox formaları aşağıenerjili konformasiya ilə təmsil olunmuşdur.

eeə şeypinin əsas zəncirinin dörd formasının nisbi enerjiləri (1.4) – (3.0) kkal/mol enerji intervalında dəyişir. Şeypin ən stabil konformasiyası nisbi enerjisi 1.4 kkal/mol olan B B₃ R R -dir. O, qlobal konformasiyadan yalnız Pro1-in əsas zəncirinin formasına görə fərqlənir. eee şeypinin əsas zəncirinin dörd formasının konformasiyalarının nisbi enerjiləri (2.6) – (4.7) intervalında dəyişir. Şeypin ən stabil konformasiyası B B₁ R L-dir. Bu konformasiya fee şeypinin ən stabil konformasiyasından yalnız əsas zəncirin formasına görə fərqlənir (cədvəl 1).

β -kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsi göstərir ki, molekul elə fəza quruluşları yığımına malik olur ki, o müxtəlif bioloji funksiyaları yerinə yetirə bilər və müxtəlif reseptor molekulları ilə əlaqəyə girə bilər. β -kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsindən alınan nəticələr β -kazomorfin-5, -6, -7 molekullarının fəza quruluşlarının tədqiqində istifadə oluna bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Чеснокова Е.А., Сарычева Н.Ю., Дубынин В.А., Каменский А.А. Опиоидные пептиды, получаемые с пищей и их влияние на нервную систему. Успехи физиологических наук, 2015, т. 46, №1, с. 22-46.
2. Дубынин В.А. Экзอร์фины: возможное биологическое и клиническое значение. Психиатрия. 2010, т.45, №3, с. 65-73.
3. Дубынин В.А., Ивлева Ю.А., Каменский А.А. Нейротропная активность опиоидных пептидов пищевого происхождения β -казоморфинов//Успехи физиол. наук. 2004, т.35, №1, с. 83-101.
4. Дубынин В.А., Каменский А.А. Бета-казоморфины и их роль в регуляции поведения. М.: КМК, 2010. 304 с.
5. Ахмедов Н.А. Теоретический конформационный анализ молекул β -казоморфина, валмуцептина и морфицептина. Молекулярная Биология, 1989, т. 23, с. 240-248.
6. Ахмедов Н.А., Годжаев Н.М., Сулейманова Е.В., Попов Е.М. Структурная организация молекул [Met] энкефалина и эндорфинов. Биоорганическая химия, 1990, т. 16, с. 649-667.

7. Akhmedov N.A., Agayeva L.N., Ismailova L.I., Godjaev N.M. The spatial structure of the cardio active peptides. *Current Topics in Peptide and Protein Research*. 2010, v. 11, pp. 87-93.
8. Гаджиева Ш.Н., Ахмедов Н.А., Масимов Э.А., Годжаев Н.М. Пространственная структура молекулы Thr-Pro-Ala-Glu-Asp-Phe-Met-Arg-Phe-NH₂, *Биофизика*, 2013, т. 58, в. 4, с. 587-590.
9. Akhmedov N.A., Ismailova L.I., Abbasli R.M. et al. Spatial Structure of Octarphin molecule. *IOSR.J.Applied Physics (IOSR-JAP)*. 2016, 8, 66-70.
10. Hasanov E.M., Akhmedov N.A. Spatial Structure of Peptide BAM-20P. *International Journal of Innovative Science and Research Technology* ISSN No:-2456-2165, 2018, v. 3, pp. 72-76.
11. Akhmedov N.A., Abbasli R.M., Agayeva L.N., Ismailova L.I. Three-dimensional structure of exorphin B5 molecule. *Conference proceedings Modern Trends In Physics*. 2019, 201-204.
12. IUPAC-IUB, *Quantity Units and Symbols in Physical Chemistry*. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1988, v. 39.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА МОЛЕКУЛЫ β-КАЗОМОРФИНА-4

Н.А.АХМЕДОВ, Л.Н.АГАЕВА, Р.М.АББАСЛЫ, Л.И.ИСМАИЛОВА

РЕЗЮМЕ

Методом теоретического конформационного анализа исследована пространственная структура молекулы β-казоморфина-4. Потенциальная функция системы выбрана в виде суммы невалентных, электростатических и торсионных взаимодействий и энергии водородных связей. Найдены низкоэнергетические конформации молекулы, значения двугранных углов основных и боковых цепей аминокислотных остатков, входящих в состав молекулы, оценена энергия внутри- и межостаточных взаимодействий. Было показано, что трехмерная структура этой молекулы может быть представлена 11 низкоэнергетическими конформациями, попадающими в энергетический интервал 0-5,0 ккал/моль.

Ключевые слова: экзорфин, казоморфин, опиоид, структура, конформация

SPATIAL STRUCTURE OF β-CASOMORPHIN-4 MOLECULE

N.A.AKHMEDOV, L.N.AGAYEVA, R.M.ABBASLI, L.I.ISMAILOVA

SUMMARY

By the method of the theoretical conformational analysis the conformational capabilities of the β-casomorphin-4 (Pro1-Phe2-Pro3-Gly4-NH₂) molecule were studied. The potential function of the system is chosen as the sum of non-valent, electrostatic and torsion interactions and the energy of hydrogen bonds. Low-energy conformations of the β-casomorphin-4 molecule, the values of the dihedral angles of the main and side chains of amino acid residues that make up the molecules are founded; the energy of intra- and inter-residual interactions is estimated. It is shown that the spatial structure of the casomorphin-4 molecule can be represented by 16 conformations.

Key words: exorphin, casomorphin, opioid, structure, conformation

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Xankişiyev Z.F.

Parabolik tip xətti diferensial tənlik üçün integral sərhəd şərtli bir məsələnin sonlu fərqlər üsulu ilə həlli 5

Fəttayev H.D.

Xətti koreperlərin laylanmasında f – strukturların liftlərinə dair 16

Qasımov Q.R., Əbusutaş Z.A.

Müxtəlif fiziki parametrlərə malik iki paralelepipeddən ibarət hərəkətdə olan cisimdə temperatur paylanması 26

Əliyev N.Ə., Osmanov V.Ə.

Kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənlik üçün üçnöqtəli sərhəd məsələsi 46

İNFORMATİKA

Xəlilov M.S.

Qazkondensat layının nisbi faza keçiricilikləri funksiyalarının identifikasiyalı təyini 51

FİZİKA

Abdinov Ə.Ş., Babayeva R.F., Əmirova S.İ., Rəhimova N.Ə., Rəsulov E.A.

Aşqarlanmış n-InSe kristalları əsasında infraqırmızı fotoqəbuledicilər 57

Abdullayev S.Q., Ömərova E.Ş.

MSSM-də HİQQS bozonunun radiasiyaparçalanmaları $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$ 65

Pənahov M.M., Ələkbərov E.Ş., Qarayev E.S., Sədrəddinov S.Ə.,**Nəzərov A.M., Fərzəliyev S.S.**

Qalayla aşqarlanmış TlInSe₂ amorf nazik təbəqələrinin termik emalı zamanı faza keçidi 81

Fiqarova S.R., Hüseyinov H.İ., Mahmudov M.M.

Kvaziikiölçülü elektron qazında qısatəsirli potensialdan səpilmə halında Maci-Riqi-Ledyuk effekti 89

Sadıxzadə G.M., Ağayev M.N., Qasımlı X.A.

Uzun boruda qaz aralığının deşilməsinə maqnit sahəsinin təsiri 96

Əhmədov N.A., Ağayeva L.N., Abbaslı R.M., İsmayılova L.İ.

β -kazomorfin-4 molekulunun fəza quruluşu 105

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ханкишиев З.Ф.

Решение методом конечных разностей одной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральными граничными условиями 5

Фаттаев Г.Д.

О лифтах f – структур в расслоении линейных кореперов 16

Гасымов Г.Р., Абусуташ З.А.

Распределение температуры в движущемся составном теле, состоящем из двух параллелепипедов с разными физическими параметрами 26

Алиев Н.А., Османов В.А.

Трехточечная краевая задача для дробных интегродифференциальных уравнений 46

ИНФОРМАТИКА

Халилов М.С.

Идентификация функций относительно проницаемых газоконденсатных пластов 51

ФИЗИКА

Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф., Амирова С.И.,

Рагимова Н.А., Расулов Э.А.

Инфракрасные фотоприемники на основе легированных кристаллов n-InSe 57

С.К.Абдуллаев, Э.Ш.Омарова

Радиационные распады ХИГГС бозонов $H(h; A) \rightarrow f\bar{f}\gamma$ в МССМ. 65

Панахов М.М., Алекперов Э.Ш., Гараев Э.С., Садрадинов С.А.,

Назаров А.М., Фарзалиев С.С.

Фазовый переход при термообработке аморфных пленок TlInSnSe₂ легированных оловом 81

Фигарова С.Р., Гусейнов Г.И., Махмудов М.М.

Эффект Маджи-Риги-Ледюка в квазидвумерном электронном газе при рассеянии на короткодействующем потенциале 89

Садых – заде Г.М., Агаев М.Н., Гасимли Х.А.

Влияние магнитного поля на пробой газа в длинных трубках 96

Ахмедов Н.А., Агаева Л.Н., Аббаслы Р.М., Исмаилова Л.И.

Пространственная структура молекулы β -казоморфина-4 105

CONTENTS

MATHEMATIC

Khankishiyev Z.F.

Solution of one problem for the parabolic type linear differential equation with integral boundary conditions by the finite difference method 5

Fattayev H.D.

On lifts of f - structures in the bundle of linear coframes 16

Gasimov G.R., Abusutash Z.A.

Temperature distribution in moving composite bodies which consists of two rectangular with a different physical parameter..... 26

Aliyev N.A., Osmanov V.Ə.

Three-point boundary value problem for fractional integro-differential equations 46

INFORMATICS

Khalilov M.S.

Identification of functions relating to permeable gas condensate formations..... 51

PHISIC

Abdinov A.Sh., Babayeva R.F., Amirova S.I.,**Rahimova N.A., Rasulov E.A.**

Infrared receivers based on doped n-InSe crystals..... 57

Abdullaev S.K., Omarova E.Sh.

Radiative higgs boson decays $H(h; A) \Rightarrow f\bar{f}\gamma$ in MSSM. 65

Panahov M.M., Alekperov E.Sh., Garayev E.S., Sadraddinov S.A.,**Nazarov A.M., Farzaliyev S.S.**

Phase transition during heat treatment of amorphous TlInS₂ films doped with tin 81

Figarova S.R., Huseynov H.I., Mahmudov M.M.

Maggi-Righi-Leduc effect in quasi-two-dimensional electron gas at scattering on short-range potential..... 89

Sadig-zada G.M., Agayev M.N., Gasimli Kh.A.

Influence of a magnetic field on gas breakdown in long tubes..... 96

Akhmedov N.A., Agayeva L.N., Abbasli R.M., Ismailova L.I.

Spatial structure of β -casomorphin-4 molecule 105

Redaktor: *Məryəm Qədimova*

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

*Yığılmağa verilmişdir: 01.05.2020. Çapa imzalanmışdır:03.06.2020
Formatı 70x100 1/16. Həcmi 7,0. ç.v. Sayı 100.*

*Bakı Dövlət Universitetinin Mətbəəsində çap olunmuşdur
Ünvan: Azərbaycan Respublikası, Bakı şəhəri,
AZ 1148, ak. Zəhid Xəlilov küç., 33,
Tel., (+99412) 439 08 58 / 439 05 17
Faks: (+99412) 598 33 76
info@bsu.edu.az
www.bsu.edu.az*